# 目 次

**第 1 章　本研究の背景と目的　1**

1.1　本研究の背景 . . . . . 1

1.2　本研究の目的および本論文の構成 . . . . . 2

**第 2 章　全域通過回路と遅延器の並列構造　3**

2.1　全域通過回路 . . . . . 3

2.2　並列構造の振幅特性と位相特性・群遅延特性 . . . . . 5

2.3　フィルタタイプによる構造の決定 . . . . . 8

2.3.1　$H_+(z)$、$H_-(z)$ の決定 . . . . . 8

2.3.2　$d$ の決定 . . . . . 9

2.4　フィルタの安定性について . . . . . 11

**第 3 章　最大平坦型フィルタの設計　12**

3.1　最大平坦性 . . . . . 12

3.1.1　平坦性の定義 . . . . . 12

3.1.2　最大平坦性の定義 . . . . . 12

3.2　振幅最大平坦条件の導出 . . . . . 12

3.2.1　振幅最大平坦と$\Delta\theta(\omega)$ 最大平坦との関係 . . . . . 12

3.2.2　$\Delta\theta(\omega)$ の最大平坦条件 . . . . . 14

3.3　最大平坦型低域通過フィルタの設計 . . . . . 19

3.3.1　低域通過フィルタとなるための条件 . . . . . 19

3.3.2　伝達関数の決定 . . . . . 19

3.3.3　設計方針 . . . . . 21

3.3.4 設計法 . . . . . 25
3.3.5 設計例 . . . . . 25
3.3.6 係数感度の検討 . . . . . 28
3.4 最大平坦型高域通過フィルタの設計 . . . . . 30
3.4.1 高域通過フィルタとなるための条件 . . . . . 30
3.4.2 設計法 . . . . . 30
3.4.3 設計例 . . . . . 31
3.5 最大平坦型帯域除去フィルタの設計 . . . . . 32
3.5.1 帯域除去フィルタとなるための条件 . . . . . 32
3.5.2 伝達関数の決定 . . . . . 33
3.5.3 設計例 . . . . . 35
3.5.4 設計法の検討 . . . . . 37
3.6 最大平坦型帯域通過フィルタの設計 . . . . . 37
3.6.1 帯域通過フィルタとなるための条件 . . . . . 37
3.6.2 設計例 . . . . . 37
3.6.3 設計法の検討 . . . . . 39

**第 4 章 通過域最大平坦・阻止域等リプル近似型フィルタの設計 40**
4.1 Remez のアルゴリズム . . . . . 41
4.2 等リプル近似の条件式 . . . . . 41
4.3 阻止域等リプル近似フィルタの伝達関数の決定 . . . . . 44
4.4 本研究で用いる等リプル近似のアルゴリズム . . . . . 46
4.5 設計例 . . . . . 48
4.6 問題点 . . . . . 50
4.7 通過域・阻止域最大平坦型フィルタとの遷移域幅の比較 . . . . . 50
4.8 阻止域等リプル近似の場合の 2 重相補出力 . . . . . 51

**第 5 章 結論 52**
5.1 結論 . . . . . 52
5.2 今後の課題 . . . . . 53

**謝 辞 55**

**参 考 文 献** **56**

**付録 I 通過域・阻止域最大平坦型低域通過フィルタの設計データ** **58**

I.1 $d = -1$ の場合 . . . . . 58

I.2 $d = 1$ の場合 . . . . . 61

**付録 II 所望の振幅特性が得られない例** **62**

II.1 通過域・阻止域最大平坦型帯域除去フィルタ . . . . . 62

II.2 阻止域等リプル近似型低域通過フィルタ . . . . . 64

# 第 1 章　本研究の背景と目的

## 1.1　本研究の背景

ディジタルフィルタは、設計時にはその乗算器係数は無限語長で考えるが、ハードウェア上に実現する際には有限語長で表さねばならない。その結果、設計段階で得られる特性から劣化が生じる。この劣化を低減させるため、低係数感度特性を有するフィルタを設計することが重要であり、これまで多くの研究がなされている。

近年、特に注目されているのは、全域通過回路 2 つを並列に接続した IIR ディジタルフィルタである。このフィルタは、以下のような長所を持っている [2, 3, 4]。

- 構造的に最大振幅が 1 を越えないため、通過域において低係数感度である。
- 全域通過回路の伝達関数は分母多項式と分子多項式が鏡像関係にあるため、他の IIR フィルタに比べて、乗算器数が少なくて済む。
- 2 つの伝達関数の和と差の伝達関数は互いに 2 重相補 (doubly-complement) の関係にあり、低域通過フィルタと高域通過フィルタ、あるいは帯域除去フィルタと帯域通過フィルタが同時に実現できる。
- 特に、片方の全域通過回路として遅延器を用いると、遅延器の直線位相特性から並列構造全体の位相特性が、近似的に直線位相となる。

最後の長所は非常に有効である。その理由には次の 2 つがあげられる。

- この構造では、位相特性は近似的直線位相になることが既知なため、振幅特性のみに着目して設計を行えば良い。
- FIR フィルタで完全直線位相特性を持たせた場合より、一般にフィルタの次数が低く済み、その結果として群遅延を小さくできる。

このような長所を持つ全域通過回路と遅延器の並列構造に対して今までに行われた研究は、いずれも振幅特性の等リプル近似を行う設計法で、最大平坦近似については論じられていない。

## 1.2　本研究の目的および本論文の構成

本研究では、全域通過回路と遅延器の並列構造に対して、今まで論じられていない振幅特性の最大平坦近似を行う設計法の確立を目的とする。

本論文ではまず、2 章でこの構造の諸特性を導出する。次に、3 章で通過域・阻止域ともに最大平坦となるような低域通過フィルタ・高域通過フィルタの設計法の確立について述べる。さらに、フィルタとして重要な帯域通過フィルタ・帯域除去フィルタの設計を検討する。4 章では、通過域は最大平坦近似、阻止域は等リプル近似となるフィルタの設計について述べる。最後に、5 章で本研究のまとめを述べる。

# 第 2 章　全域通過回路と遅延器の並列構造

## 2.1　全域通過回路

全域通過回路はIIRディジタルフィルタの一種であり、全周波数領域にわたり振幅が一定値で、位相のみが変化する特性を有している。$n$ 次の全域通過回路の伝達関数は

$$A(z) = z^{-n} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} \tag{2.1}$$

のように表せる[1]。ただし、$a_i$は実数であり、$a_0 = 1$ とする。この伝達関数は分子、分母多項式が鏡像関係にあるので、全域通過回路は $n$ 個の乗算器によって構成できる[1]。

また、

$$H(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} \tag{2.2}$$

とすると、

$$A(z) = z^{-n} \frac{H(z^{-1})}{H(z)} \tag{2.3}$$

となる。

この回路の周波数特性は

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) & = & e^{\theta_H(\omega)} |H(e^{j\omega})| \\ |H(e^{-j\omega})| & = & |H(e^{j\omega})| \\ \theta_H(-\omega) & = & -\theta_H(\omega) \end{cases} \tag{2.4}$$

(ただし、$\theta(\omega)$ は $H(z)$ の位相特性、$|H(e^{j\omega})|$ は $H(z)$ の振幅特性とする)

より

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-jn\omega}|H(e^{-j\omega})|e^{j\theta_H(-\omega)}}{|H(e^{j\omega})|e^{j\theta_H(\omega)}} \\ &= e^{j(-2\theta_H(\omega)-n\omega)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。従って、全域通過回路の位相特性は

$$\theta_A(\omega) \equiv -2\theta_H(\omega) - n\omega \tag{2.6}$$

と表される。また、

$$\theta_H(\omega) = -\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(i\omega)}\right) \tag{2.7}$$

より、

$$\theta_A(\omega) = -n\omega + 2\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(i\omega)}\right) \tag{2.8}$$

となる。

さらに、全域通過回路の群遅延を $\tau_A$ とすると、

$$\begin{aligned} \tau_A &= -\frac{\partial}{\partial\omega}\theta_A(\omega) \\ &= n + 2\frac{\partial}{\partial\omega}\theta_H(\omega) \end{aligned} \tag{2.9}$$

である。

この全域通過回路が安定となるための十分条件は、

1. $\theta_A(\omega)$ が $\omega \in [0, \pi]$ において単調減少
   ( $\omega \in [0, \pi]$ において $\tau_A > 0$ であること)

2. $\theta_A(\pi) - \theta_A(0) = -n\pi$

を同時に満たすことである [3]。

## 2.2　並列構造の振幅特性と位相特性・群遅延特性

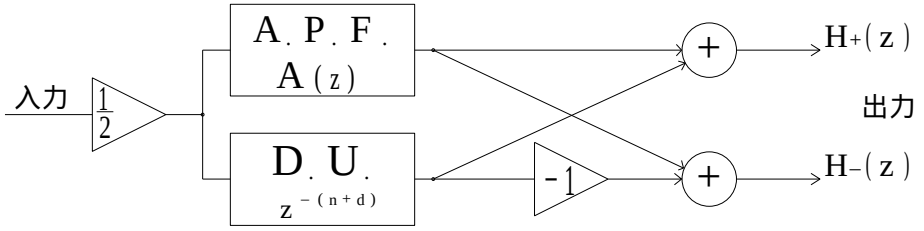



図 2.1　全域通過回路と遅延器の並列構造

図 2.1のような全域通過回路と遅延器の和の並列構造および差の並列構造を考える。ここで、$A(z)$ は全域通過回路の伝達関数で、遅延器の次数は $n+d$ (全域通過回路の次数より、$d$ 次高い ($d<0$ の場合は $|d|$ 次低い)) とする。前者の伝達関数を $H_+(z)$、後者の伝達関数を $H_-(z)$ とする。2 つの伝達関数はそれぞれ、

$$\begin{cases} H_+(z) &= \dfrac{A(z)+z^{-(n+d)}}{2} \\ H_-(z) &= \dfrac{A(z)-z^{-(n+d)}}{2} \end{cases} \tag{2.10}$$

となる。前者の周波数特性は $z=e^{j\omega}$ ( $\omega$ は規格化角周波数) を代入すると、

$$\begin{aligned} H_+(e^{j\omega}) &= \frac{A(e^{j\omega})+e^{-j(n+d)\omega}}{2} \\ &= \frac{e^{j\theta_A(\omega)}+e^{-j(n+d)\omega}}{2} \\ &= \frac{\cos\theta_A(\omega)+\cos\left((n+d)\omega\right)+j\left(\sin\theta_A(\omega)-\sin\left((n+d)\omega\right)\right)}{2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

となるので、振幅特性は

$$\begin{aligned} &\left|H_+(e^{j\omega})\right|^2 \\ &= \left(\frac{\cos\theta_A(\omega)+\cos((n+d)\omega)}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta_A(\omega)-\sin((n+d)\omega)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(1+\cos\big(\theta_A(\omega)+(n+d)\omega\big)\Big) \\ &= \cos^2\left(\frac{\theta_A(\omega)+(n+d)\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left|H_+(e^{j\omega})\right| = \left|\cos\left(\frac{\theta_A(\omega)+(n+d)\omega}{2}\right)\right|$$

となる。以後、本論文では、

$$|H_+(\omega)| \quad = \quad \left|\cos\left(\frac{\theta_A(\omega)+(n+d)\omega}{2}\right)\right|$$

とし、絶対値をとる前の

$$H_+(\omega) = \cos\left(\frac{\theta_A(\omega)+(n+d)\omega}{2}\right) \tag{2.12}$$

を振幅特性として用いる。

振幅特性は、次の関数によって特徴づけられる。

$$\Delta\theta(\omega) \equiv \theta_A(\omega) + (n+d)\omega$$

上式は式 (2.6) より

$$\Delta\theta(\omega) = -2\theta_H(\omega) + d\omega$$

となる。式 (2.7) より、結局

$$H_+(\omega) \quad = \quad \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \tag{2.13}$$

$$\Delta\theta(\omega) \quad = \quad \theta_A(\omega) + (n+d)\omega \tag{2.14}$$

$$= \quad -2\theta_H(\omega) + d\omega \tag{2.15}$$

$$= \quad d\omega + 2\arctan\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \sin(i\omega)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(i\omega)}\right) \tag{2.16}$$

となる。また、差の並列構造の振幅特性は同様に計算すると

$$H_-(\omega) = \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \tag{2.17}$$

で、$\Delta\theta(\omega)$ は同一である。従って、本構造では、$|H_+(\omega)|^2 + |H_-(\omega)|^2 = 1$ となり、和の並列構造と差の並列構造とで 2 重相補出力が得られる。

また、両者とも振幅特性は$\Delta\theta(\omega)$、すなわち全域通過回路と遅延器の位相差によって変化する。和の並列構造で考えれば、位相差が $2m\pi$ ($m$ は整数) のときには通過域が、位相差が $(2m+1)\pi$ ($m$ は整数) のときに阻止域が形成される。“和の並列構造” の通過域が “差の並列構造” では阻止域に、“和の並列構造” の阻止域が

“差の並列構造” の通過域に対応する。ゆえに、本構造で重要なのはこの位相差 $\Delta\theta(\omega)$ である。

一方、和の並列構造の位相特性を$\theta_+(\omega)$ とすると、式 (2.11) より、

$$\begin{aligned}\theta_+(\omega) &= \arctan\left(\frac{\sin\theta_A(\omega)-\sin((n+d)\omega)}{\cos\theta_A(\omega)+\cos((n+d)\omega)}\right)\\ &= \frac{\theta_A(\omega)-(n+d)\omega}{2}\end{aligned} \tag{2.18}$$

である。すなわち、全域通過回路の位相特性と遅延器の位相特性の和の$\frac{1}{2}$である。式 (2.6)、式 (2.7) より、

$$\theta_+(\omega) = -\left(n+\frac{d}{2}\right)\omega-\theta_H(\omega) \tag{2.19}$$

$$= -\left(n+\frac{d}{2}\right)\omega+\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i\sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^{n}a_i\cos(i\omega)}\right) \tag{2.20}$$

差の並列構造の位相特性は同様にして、

$$\begin{aligned}\theta_-(\omega) &= \frac{\theta_A(\omega)-(n+d)\omega}{2}+\frac{\pi}{2}\\ &= -\left(n+\frac{d}{2}\right)\omega-\theta_H(\omega)+\frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$= -\left(n+\frac{d}{2}\right)\omega+\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i\sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^{n}a_i\cos(i\omega)}\right)+\frac{\pi}{2} \tag{2.22}$$

さらに、和の並列構造の群遅延を$\tau_+$とすると、式 (2.19) より、

$$\begin{aligned}\tau_+ &= -\frac{\partial}{\partial\omega}\theta_+(\omega)\\ &= \frac{\partial}{\partial\omega}\theta_H(\omega)+\left(n+\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

同様に、差の並列構造の群遅延を$\tau_-$とすると、式 (2.21) より、

$$\begin{aligned}\tau_- &= -\frac{\partial}{\partial\omega}\theta_-(\omega)\\ &= \frac{\partial}{\partial\omega}\theta_H(\omega)+\left(n+\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

従って、群遅延 $\tau$ はどちらの場合も

$$\tau=\tau_+=\tau_-=\frac{\partial}{\partial\omega}\theta_H(\omega)+\left(n+\frac{d}{2}\right) \tag{2.23}$$

と表せる。

## 2.3　フィルタタイプによる構造の決定

### 2.3.1　$H_+(z)$、$H_-(z)$ の決定

本研究では全域通過回路と遅延器の和の並列構造と差の並列構造とを考えているが、この構造はフィルタの種類によって決定される。それぞれの構造の振幅特性は、

$$\begin{cases} H_+(\omega) &= \cos\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \\ H_-(\omega) &= \sin\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \end{cases}$$

である。また、$\Delta\theta(\omega)$ は $\omega = 0$ において

$$\begin{aligned} \Delta\theta(0) &= \theta_A(0) + (n+d) \times 0 && (\text{式 } (2.14) \text{ より}) \\ &= 0 && (\theta_A(0) = 0 \text{ より}) \end{aligned} \qquad (2.24)$$

である。従って、$\omega = 0$ での振幅特性を、1 にする場合には $H_+(z)$(和の並列構造)、0 にする場合には $H_-(z)$(差の並列構造) を用いることになる。

表 2.1にフィルタの種類と用いる構造を示す (表 2.1中の $d$ に関しては次節参照)。

表 2.1　フィルタの種類と $H_+(z)$、$H_-(z)$、$d$

| フィルタタイプ | $H_+(z)$ or $H_-(z)$ | 構造 | $d$ |
|---|---|---|---|
| 低域通過フィルタ | $H_+(z)$ | 和の並列構造 | $d = \pm 1$ |
| 高域通過フィルタ | $H_-(z)$ | 差の並列構造 | $d = \pm 1$ |
| 帯域除去フィルタ | $H_+(z)$ | 和の並列構造 | $d = \pm 2$ |
| 帯域通過フィルタ | $H_-(z)$ | 差の並列構造 | $d = \pm 2$ |

### 2.3.2 $d$ の決定

全域通過回路と遅延器との次数差 $d$ もフィルタの種類によって決定される。

式 (2.16) より$\Delta\theta(\omega)$ は $[0,\pi]$ において、$0\ (\omega=0) \sim d\pi\ (\omega=\pi)$ まで変化する。従って、

$$\Delta\theta(\omega) = m\pi \qquad (m \text{ は整数}) \tag{2.25}$$

は、少なくとも $|d|+1$ 回起こることになる。

和の並列構造 $H_+(\omega) = \cos\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right)$ では、

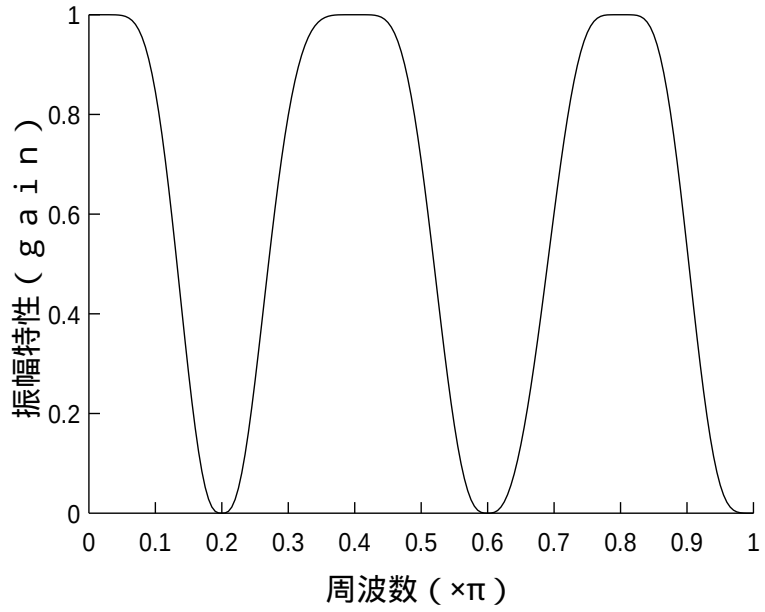
$$\begin{aligned} H_+(\omega)=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta\theta(\omega)=2m\pi \qquad \left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+1 \text{ 回} \\ H_+(\omega)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta\theta(\omega)=(2m+1)\pi \qquad \left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil \text{ 回} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (m \text{ は整数}) \end{aligned}$$

となる。同様に、差の並列構造では、

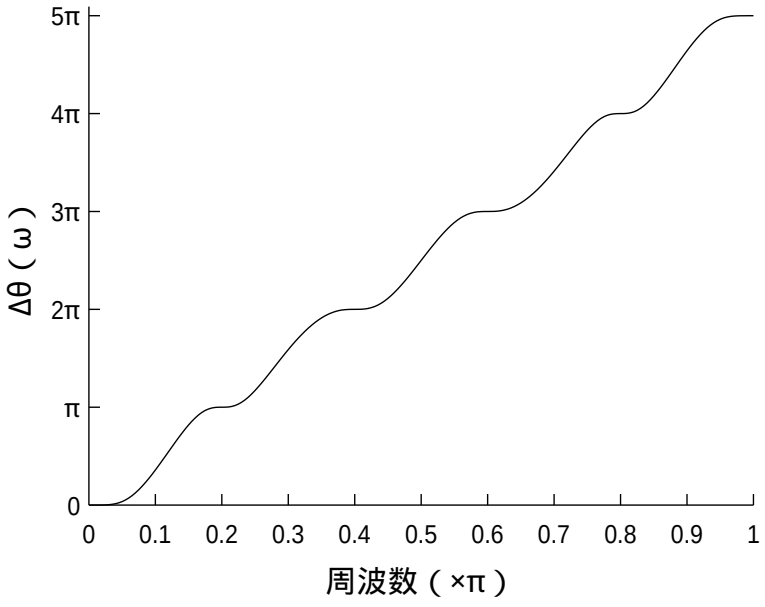
$$\begin{aligned} H_-(\omega)=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta\theta(\omega)=(2m+1)\pi \qquad \left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil \text{ 回} \\ H_-(\omega)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta\theta(\omega)=2m\pi \qquad \left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+1 \text{ 回} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (m \text{ は整数}) \end{aligned}$$

となる。このことから、フィルタの種類と $d$ の関係は表 2.1のようになる。

さらに、マルチバンドの帯域通過フィルタや帯域除去フィルタは $d=\pm3,\pm4,\pm5,\ldots$ とすることによって得られる。振幅特性 $H_+(\omega)$ と$\Delta\theta(\omega)$ の関係の一例を図 2.2に示す。




(a) 振幅特性 $H_+(\omega)$




(b) $\Delta\theta(\omega)$

**図 2.2**　$H_+(\omega)$ と$\Delta\theta(\omega)$ の一例 $(n = 16、d = 5)$

## 2.4　フィルタの安定性について

全域通過回路はIIRフィルタであるゆえ、その安定性が問題となる。2.1節より、全域通過回路が安定となるためには、その群遅延 $\tau_A$ が正であることが必要である。$\tau_A > 0$ は、式 (2.9) および式 (2.23) より、

$$\tau > \frac{n+d}{2} \qquad (\omega \in [0, \pi]) \tag{2.26}$$

と同値である。

遅延器の安定性は明らかであり、安定なフィルタどうしを並列接続しても安定であるから、結局、本構造で安定性を検討する際には、式 (2.26) を確かめれば良い。

# 第 3 章　最大平坦型フィルタの設計

## 3.1　最大平坦性

### 3.1.1　平坦性の定義

ある関数 $f(\omega)$ が、$\omega = \omega_t$において平坦性を持つということは、次のように定義される。

$f(\omega)$ を $\omega = \omega_t$においてテーラー展開したとき、

$$f(\omega) \quad = \quad f(\omega_t) + \sum_{i=k}^{\infty} C_i(\omega - \omega_t)^i \qquad (k > 1)$$

と書ける。

さらに、このとき $f(\omega)$ は $\omega = \omega_t$において $\omega$ ~ $\omega^{k-1}$ の微係数まで $0$ となる $(k-1)$ 次の平坦性を持つという。

### 3.1.2　最大平坦性の定義

ある関数 $f(\omega)$ に対して、許容される自由度をすべて $\omega = \omega_t$における平坦性に用いたとき、関数 $f(\omega)$ は $\omega = \omega_t$ において最大平坦であるという。

## 3.2　振幅最大平坦条件の導出

### 3.2.1　振幅最大平坦と$\Delta\theta(\omega)$ 最大平坦との関係

2.2節で述べたように、振幅特性 $H_+(\omega)$、$H_-(\omega)$ は$\Delta\theta(\omega)$ によって決定される。以下、振幅最大平坦性と$\Delta\theta(\omega)$ 最大平坦性の関係を導出する。

$\Delta\theta(\omega)$ を $\omega = \omega_t$でテーラー展開したとき

$$\Delta\theta(\omega) = \Delta\theta(\omega_t) + \sum_{i=k}^{\infty} C_i(\omega - \omega_t)^i \tag{3.1}$$

となるようにすると、

$$\begin{aligned}
&H_+(\omega) \\
&= \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i\right) \\
&= \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\cos\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i\right) \\
&\quad - \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\sin\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i\right) \\
&= \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i\right)^{2j}\right) \\
&\quad - \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)!}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i\right)^{2j-1}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\left(\sum_{i=2k}^{\infty} g_i(\omega-\omega_t)^i\right) \\
&\quad + \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty} f_i(\omega-\omega_t)^i\right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

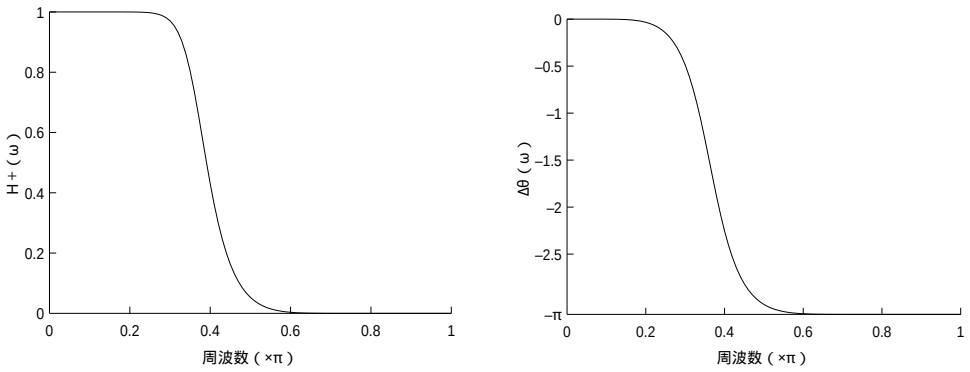
従って、$\Delta\theta(\omega)$ の $\omega = \omega_t$における微係数を $(k-1)$ 次まで 0 にすると $H_+(\omega)$ の $\omega = \omega_t$ における微係数も $(k-1)$ 次まで 0 になる。ゆえに、振幅を最大平坦にするには、$\Delta\theta(\omega)$ を最大平坦にすれば良い。特に、$\sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) = 0$ のときには、$H_+(\omega)$ の $\omega = \omega_t$における微係数は $(2k-1)$ 次まで 0 になる。これは、$\sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) = 0$ が $H_+(\omega_t) = \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) = 1$ と同値であることから、通過域において振幅特性 $H_+(\omega)$ は $\sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) = 1$ となる阻止域に比べより高い、平坦性が得られることを示している。

$H_-(\omega)$ も同様で、

$$
\begin{aligned}
& H_-(\omega) \\
&= \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\left(\sum_{i=2k}^{\infty} g_i(\omega-\omega_t)^i\right) \\
&\quad + \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty} {f'}_i(\omega-\omega_t)^i\right) \qquad (3.3) \\
& \qquad\qquad ({f'}_i = -f_i)
\end{aligned}
$$

となるので、$\Delta\theta(\omega)$ の $\omega=\omega_t$における微係数を $(k-1)$ 次まで 0 にすると $H_-(\omega)$ の $\omega=\omega_t$における微係数も $(k-1)$ 次まで 0 になる。また、同様に $H_-(\omega_t)=1$ であれば $H_-(\omega)$ の $\omega=\omega_t$における微係数は $(2k-1)$ 次まで 0 になる。

同一のフィルタ係数による、$H_+(\omega)$ と$\Delta\theta(\omega)$ の例を図 3.1に示す。




(a) $H_+(\omega)$ の周波数特性　　(b) $\Delta\theta(\omega)$ の周波数特性

**図 3.1** $H_+(\omega)$ と$\Delta\theta(\omega)$ の関係の例 $(n=17、d=-1)$

### 3.2.2 $\Delta\theta(\omega)$ の最大平坦条件

$\Delta\theta(\omega)$ は、$\omega=\omega_t$においてテーラー展開したとき、

$$\Delta\theta(\omega) = \Delta\theta(\omega_t) + \sum_{i=k}^{\infty} C_i(\omega-\omega_t)^i$$

のように表せるという条件を式 (2.15) を用いて、変形すると、

$$\begin{aligned}\theta_H(\omega) &= -\frac{\Delta\theta(\omega) - d\omega}{2} \\ &= -\frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2} + \frac{1}{2}d\omega - \sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。さらに、並列構造全体の群遅延 $\tau$ を考えると、式 (2.23)、式 (3.4) より

$$\tau = (n+d) + \sum_{i=k}^{\infty} {C'}_{i-1}(\omega-\omega_t)^{i-1} \qquad \left({C'}_{i-1} = -i\frac{C_i}{2}\right) \tag{3.5}$$

従って、振幅最大平坦近似のためには、この群遅延を最大平坦近似すれば良いことになる。

群遅延最大平坦近似は次のような手法を用いる [1, 5, 6, 7, 8]。

$$\delta(\omega) = -\theta_H(\omega) + \frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2} \tag{3.6}$$

を考える。群遅延が最大平坦となるためには、式 (3.4) より、

$$\delta(\omega) = \sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i \tag{3.7}$$

という形になればよい。式 (3.6) の両辺で tan をとると、

$$\tan\delta(\omega) = \frac{-\tan\theta_H(\omega) + \tan\left(\dfrac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)}{1 + \tan\theta_H(\omega)\tan\left(\dfrac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)} \tag{3.8}$$

となる。一方、式 (3.7) の両辺で tan をとると、

$$\tan\delta(\omega) = \tan\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{C_i}{2}(\omega-\omega_t)^i\right)$$

となり、これをテーラー展開すれば、

$$\tan\delta(\omega) = \sum_{i=k}^{\infty} {C''}_i(\omega-\omega_t)^i$$

と書ける。${C''}_i$は $C_i$ $(i \geq k)$ から決まる定数である。式 (3.8) の右辺の分子を取り除いた、

$$\frac{1}{1 + \tan\theta_H(\omega)\tan\left(\dfrac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)}$$

は、この式の分母が $\omega = \omega_t$ で $\infty$ にはならないため、この式をテーラー展開すると、

$$b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\omega - \omega_t)^i \qquad (b_i\text{は定数})$$

となる。ゆえに、$\tan\delta(\omega)$ をテーラー展開したときの最低次の項の次数が $k$ となるためには、式 (3.8) の右辺の分子を $\omega = \omega_t$ でテーラー展開したときに最低次の項の次数が $k$ となる必要がある。すなわち、テーラー展開したときに

$$-\tan\theta_H(\omega) + \tan\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) = \sum_{i=k}^{\infty} {C'''}_i(\omega - \omega_t)^i \quad ({C'''}_i\text{は定数}) \tag{3.9}$$

が成立する必要がある。式 (2.7) より、式 (3.9) の左辺はさらに

$$\begin{aligned}
&-\tan\left(-\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i\sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^{n} a_i\cos(i\omega)}\right)\right) + \tan\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} a_i\sin(i\omega) + \sin\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} a_i\cos(i\omega)}{\cos\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} a_i\cos(i\omega)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i\sin\left(\left(i + \frac{d}{2}\right)\omega - \frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} a_i\cos(i\omega)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

のように変形される。式 (3.10) の分子を除いた、

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{d\omega - \Delta\theta(\omega_t)}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} a_i\cos(i\omega)}$$

は、上式の分母が $\omega = \omega_t$ で $\infty$ にはならないので、上式をテーラー展開すると、

$$p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\omega - \omega_t)^i \qquad (p_i\text{は定数})$$

となる。ゆえに、式 (3.10) をテーラー展開したときの最低次の項の次数が $k$ となるためには、式 (3.10) の分子を $\omega = \omega_t$ でテーラー展開したときに最低次の項の次数が $k$ となる必要がある。すなわち、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\sin\left(\left(i + \frac{d}{2}\right)\omega - \frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) = \sum_{i=k}^{\infty} D_i(\omega - \omega_t)^i \qquad (D_i\text{は定数}) \tag{3.11}$$

となる必要がある。 式 (3.11) の左辺を $\omega = \omega_t$ でテーラー展開すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} a_i \sin\left(\left(i+\frac{d}{2}\right)\omega - \frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(i+\frac{d}{2}\right)^j \sin\left(\left(i+\frac{d}{2}\right)\omega_t - \frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2} + \frac{j\pi}{2}\right)(\omega-\omega_t)^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i+\frac{d}{2}\right)^j \sin\left(\left(i+\frac{d}{2}\right)\omega_t - \frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2} + \frac{j\pi}{2}\right)\right)(\omega-\omega_t)^j
\end{aligned} \tag{3.12}$$

よって、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i+\frac{d}{2}\right)^j \sin\left(\left(i+\frac{d}{2}\right)\omega_t - \frac{\Delta\theta(\omega_t)}{2} + \frac{j\pi}{2}\right) = 0 \tag{3.13}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k-1)$$

が成立すれば良い。

逆に、式 (3.13) を $j = 1, 2, \ldots, u$ まで成立させれば、$\Delta\theta(\omega) = \sum_{i=u+1}^{\infty} D_i \omega^i$ となり、$H_+(\omega)$、$H_-(\omega)$ は微係数が、$\omega = \omega_t$ で (振幅) $= 1$ ならば $(2u+1)$ 次まで、それ以外の場合は $u$ 次まで 0 になる。

なお、振幅特性

$$\begin{cases} H_+(\omega_t) = \cos\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) \\ H_-(\omega_t) = \sin\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega_t)}{2}\right) \end{cases}$$

の仕様から$\Delta\theta(\omega_t)$ の値は決定されるため、$\Delta\theta(\omega_t)$ は定数である。従って、式 (3.13) は、$a_i$に関して線形な方程式である。

さらに、特別な場合として $\omega_t = 0$ と $\omega_t = \pi$の場合を考える。

(case 1) $\omega_t = 0$ の場合

式 (3.12) は、式 (2.24) より

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)!}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i+\frac{d}{2}\right)^{2j-1}\right)\omega^{2j-1}$$

となり、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i+\frac{d}{2}\right)^{2j-1} = 0 \qquad \left(j = 1, 2, \ldots, \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\right) \tag{3.14}$$

が成立すれば良い。

逆に、式 (3.14) を $j = 1, 2, \ldots, l$ まで成立させれば、$\Delta\theta(\omega) = \sum_{i=2l+1}^{\infty} D_i \omega^i$ となり、$H_+(\omega)$、$H_-(\omega)$ は微係数が、$\omega = \omega_t$ で (振幅) $= 1$ ならば $(4l+1)$ 次まで、それ以外の場合は $2l$ 次まで 0 になる。

(case 2) $\omega_t = \pi$の場合

$\omega_t = \pi$のときは、

$$\begin{aligned} \Delta\theta(\pi) &= \theta_A(\pi) + (n+d) \times \pi && (\text{式 (2.14) より}) \\ &= d\pi && (\theta_A(\pi) = -n\pi \text{より}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

であるから、式 (3.12) は、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \sum_{i=0}^{n} a_i \left( i + \frac{d}{2} \right)^j \sin \left( \left( i + \frac{d}{2} \right) \pi - \frac{d\pi}{2} + \frac{j\pi}{2} \right) \right) (\omega - \pi)^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+d}}{(2j-1)!} \left( \sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left( i + \frac{d}{2} \right)^{2j-1} \right) (\omega - \pi)^{2j-1} \end{aligned}$$

となり、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left( i + \frac{d}{2} \right)^{2j-1} = 0 \qquad \left( j = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) \quad (3.16)$$

が成立すれば良い。

逆に、式 (3.16) を $j = 1, 2, \ldots, m$ まで成立させれば、$\Delta\theta(\omega) = \sum_{i=2m+1}^{\infty} D_i \omega^i$ となり、$H_+(\omega)$、$H_-(\omega)$ は微係数が、$\omega = \omega_t$ で (振幅) $= 1$ ならば $(4m+1)$ 次まで、それ以外の場合は $2m$ 次まで 0 になる。

$\omega_t = 0$、$\pi$の場合も条件式 (式 (3.14)、式 (3.16)) は $a_i$について線形な方程式である。

## 3.3 最大平坦型低域通過フィルタの設計

### 3.3.1 低域通過フィルタとなるための条件

低域通過フィルタになるためには、表2.1より、$H_+(z)$ を用いて $d = \pm 1$ とすればよい。このとき、

$$\begin{cases} H_+(0) &= 1 \\ H_+(\pi) &= 0 \end{cases}$$

は構造的に決定されている。

### 3.3.2 伝達関数の決定

図2.1において、全域通過回路の次数を $n$ とし、$d$ の値は定まっていると仮定すると、このフィルタの自由度は全域通過回路の係数 $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ の $n$ である。この自由度を通過域の最大平坦化のために $l$ 割り当て、阻止域の最大平坦化のために $m$ 割り当てることにする。$\omega = 0$、$\omega = \pi$での振幅の値は構造的に決定されてしまっているので、すべての自由度を通過域及び阻止域の最大平坦化に費やして良く、$l + m = n$ となる。

このとき、全域通過回路のフィルタ係数 $a_i$ を決定するために解かねばならない連立方程式は式 (3.14) および式 (3.16) より、

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i + \frac{d}{2}\right)^{2j-1} &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left(i + \frac{d}{2}\right)^{2j-1} &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{3.17}$$

である。これを行列で表現すると

$$AX = b \tag{3.18}$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_n \\ y_1^3 & y_2^3 & \cdots & y_i^3 & \cdots & y_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{2l-1} & y_2^{2l-1} & \cdots & y_i^{2l-1} & \cdots & y_n^{2l-1} \\ -y_1 & y_2 & \cdots & (-1)^i y_i & \cdots & (-1)^n y_n \\ -y_1^3 & y_2^3 & \cdots & (-1)^i y_i^3 & \cdots & (-1)^n y_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -y_1^{2m-1} & y_2^{2m-1} & \cdots & (-1)^i y_i^{2m-1} & \cdots & (-1)^n y_n^{2m-1} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$y_i = \left(i + \frac{d}{2}\right) \tag{3.21}$$

$$b = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -y_0^3 \\ \vdots \\ -y_0^{2l-1} \\ -y_0 \\ -y_0^3 \\ \vdots \\ -y_0^{2m-1} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

この線形連立方程式を解くことで、

- 振幅が、通過域・阻止域両方において最大平坦
- 近似的直線位相

となる伝達関数が決定できる。

特に、この連立方程式は $l = m$ のときは、ファンデルモンドの行列式を利用して解析的に解くことができる。しかしながら、$l \neq m$ のときには解析的に解くことが難しく、数値を代入して計算機を利用して解くより他ない。

### 3.3.3 設計方針

実際の設計にあたっては、仕様として与えられるものは、通過域や阻止域における平坦性ではなく、通過域端の周波数や阻止域端の周波数などである。そこで設計法の確立に必要なことは、

> 仕様として与えられる通過域端周波数や阻止域端周波数を用いて
> 設計パラメータの通過域・阻止域それぞれに割り当てる自由度 $(l、m)$
> を求める関係式を導出すること

である。ただし、本研究では、通過域端周波数は振幅 $0.95$ の周波数、阻止域端周波数は振幅 $0.05$ の周波数とする。

連立方程式が解析的に解ければ、上記の関係式は導出できるだろうが、$l \neq m$ の場合には解析的に解くことは難しい。そこでやむを得ず、多数の設計例をもとに、統計的な手法で関係式を導出することにした。設計例として、$n = 2 \sim 10$、$l = 1 \sim n-1$ の $45$ 種類のフィルタ†をまず設計した。

それらの設計例から得られたことは次の通りである。

- 通過域端周波数と阻止域端周波数の差である遷移域幅は、フィルタの次数 $n$ に大きく影響される。次数を上げるほど遷移域幅は小さくなる。$n$ を固定して、通過域に割り当てる自由度 $l$ を変えても遷移域幅はあまり変わらない。
- $n$ を固定して $l$ を変えると、$l = n-1$ のとき遷移域幅が最小となり、$l = 1$ のとき遷移域幅が最大となる。
- フィルタ次数 $n$ を固定しておいて、通過域に割り当てる自由度 $l$ を変えると通過域端周波数は変化する。

以上の考察のもとに次のようにして関係式を導出する。ただし、通過域端周波数を $\omega_p$、通過域から阻止域の遷移域幅を $\omega_d$ とする。

1. $l = 1$、$n = 2 \sim 10$ の設計例から、縦軸 $n$ 横軸 $\omega_d$のグラフをプロットし、$n = f_1(\omega_d)$ なる関数 $f_1$の形を類推し、最小二乗法によって関数内の係数を決定する。こうして得られる $n$ は与えられた $\omega_d$を実現するための $n$ の最大値 (最悪値) である。

† 付録 I 参照

2. 同様に、$l = n - 1$、$n = 2 \sim 10$ の設計例から、$n = f_2(\omega_d)$ となる関数 $f_2$を決定する。こうして得られる $n$ は与えられた $\omega_d$を実現するための $n$ の最小値 (最良値) である。

3. $l = g(n, \omega_p)$ は、$n$ を固定したときの縦軸 $l$ 横軸 $\omega_p$のグラフを $n = 2 \sim 10$ それぞれについてプロットし、関数 $g$の形を類推し、最小二乗法によって関数内の係数を決定する。

得られた関係式は次のようになる。

<設計データから得られた関係式>

$(1) d = -1$ の場合

$n$ の候補 $\left\lfloor \frac{2.629}{\omega_d^2} \right\rfloor \leq n \leq \left\lceil \frac{3.529}{\omega_d^2} \right\rceil$

$l$の候補 $\langle -1.106 \times w_p^{\frac{5}{4}} + 1.830 \times w_p^{\frac{5}{4}} \times \log n \rangle$

( ただし、$\langle x \rangle$ は、$x$ の四捨五入を示すものとする )

$(2) d = +1$ の場合

$n$ の候補 $\left\lfloor \frac{7.496}{\omega_d^2} \right\rfloor \leq n \leq \left\lceil \frac{9.461}{\omega_d^2} \right\rceil$

$l$の候補 $\langle -1.024 \times w_p^{\frac{5}{4}} + 2.011 \times w_p^{\frac{5}{4}} \times \log n \rangle$

( ただし、$\langle x \rangle$ は、$x$ の四捨五入を示すものとする )

$\omega_d$と $n$ との関係式をプロットすると図 3.2および図 3.3のようになる。

本研究の設計データからもわかるように、$d = -1$ の方が遷移域幅 $\omega_d$が狭くなる傾向があり、$d = 1$ の場合よりも良いフィルタが構成できる [2]。従って、今後、設計にあたっては $d = -1$ の場合のみを考えることにする。

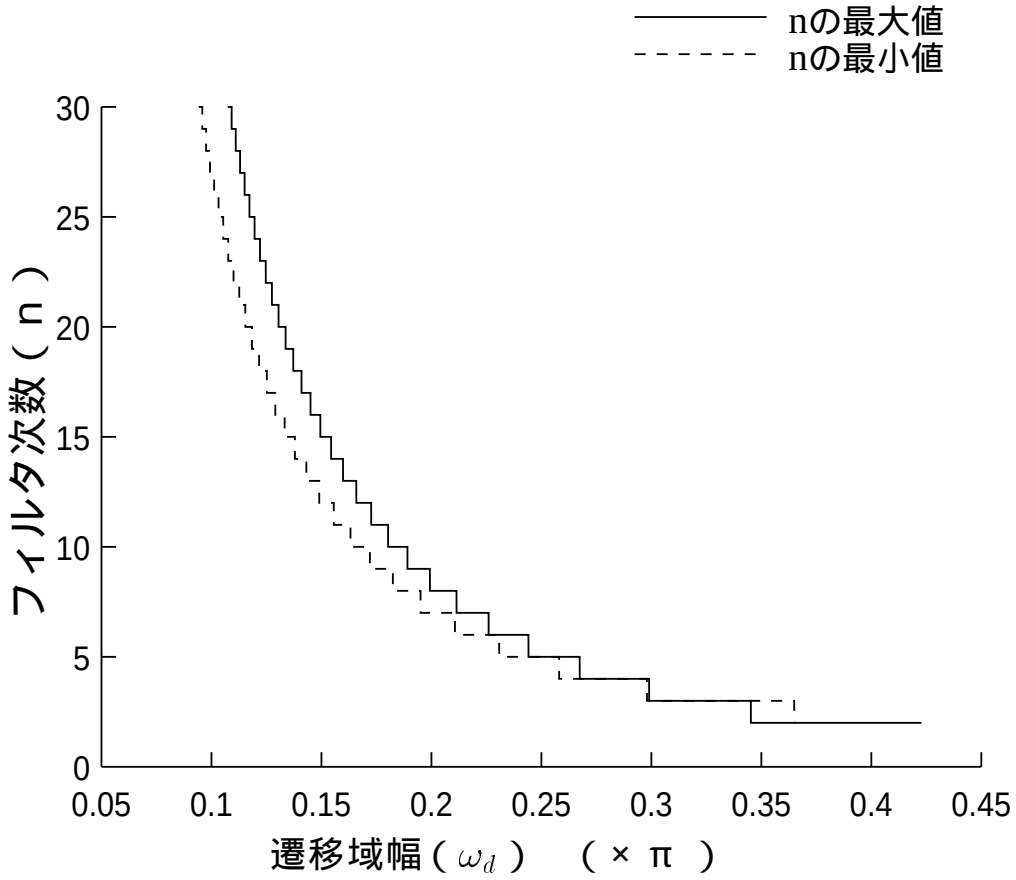



図 3.2　$\omega_d$ と $n$ との関係式 $(d = -1)$

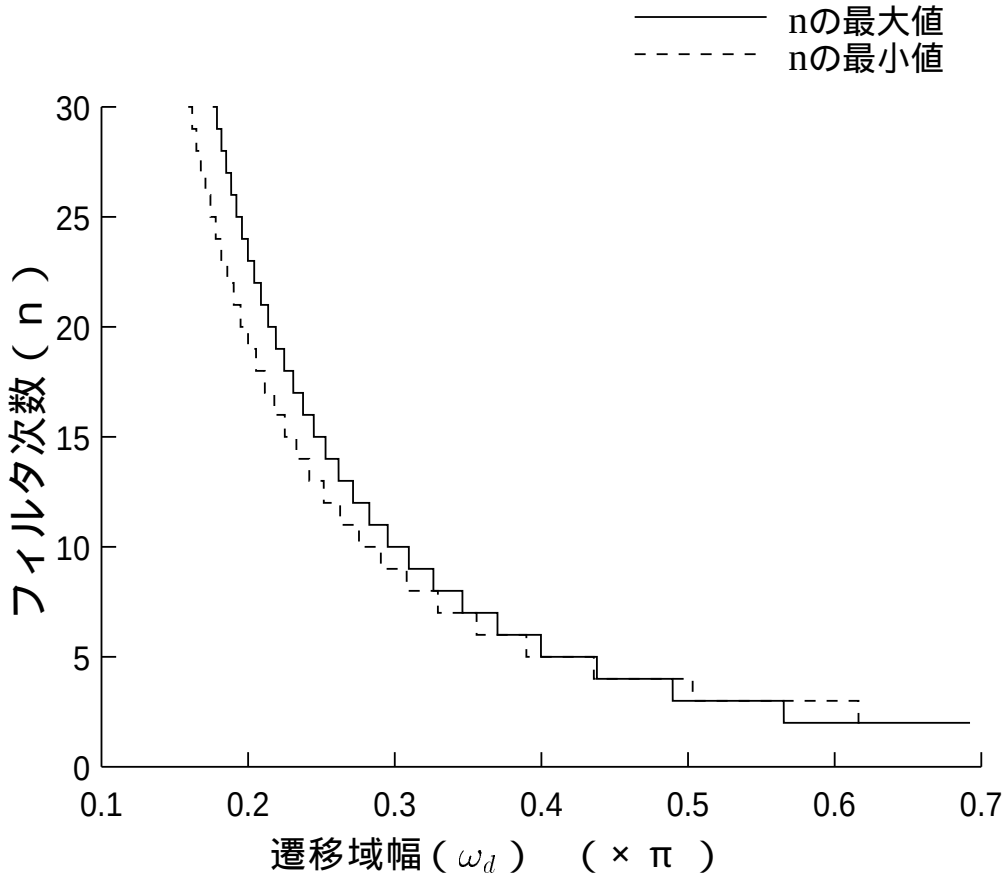



図 3.3　$\omega_d$と $n$ との関係式 $(d = 1)$

### 3.3.4 設計法

仕様として次のものを与え、以下の設計手順で設計する。

＜仕様＞

通過域端周波数 $\omega_p$

遷移域幅 $\omega_d$

＜設計手順＞

1. 得られた関係式を用いて、$\omega_d$ からフィルタの次数 $n$ の候補を絞る。
2. 得られた関係式を用いて、フィルタの次数 $n$ と通過域端周波数 $\omega_p$ から通過域の平坦度を決めるパラメータ $l$ の候補を絞る。
3. それらの候補の中から仕様に近い、$\widehat{n}$、$\widehat{l}$ を選ぶ。
4. さらに、$\widehat{n}$ を固定して、$\widehat{l}$ を若干変えてみて、最も仕様に近いものを最終的に採用する。

### 3.3.5 設計例

以下の仕様のフィルタを設計する。

＜仕様＞

通過域端周波数 $\omega_p = 0.382\pi$

遷移域幅 $\omega_d = 0.143\pi$

＜関係式から得られる設計パラメータ＞

フィルタ次数 $n$　通過域に割り当てる自由度 $l$

$n = 13$ $l = 4$

$n = 14$ $l = 5$

$n = 15$ $l = 5$

$n = 16$ $l = 5$

$n = 17$ $l = 5$

以上のパラメータの中から、仕様に最も近いものを選ぶ。

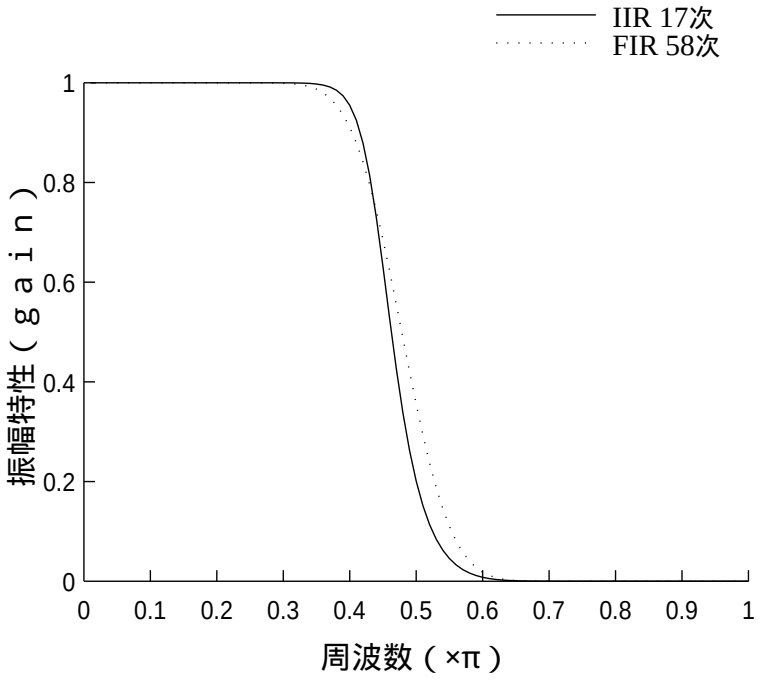
＜最終結果＞

| | |
|---|---|
| フィルタ次数 | $n = 17$ |
| $\omega = 0$ に割り当てる自由度 | $l = 7$ |
| 通過域端周波数 | $\omega_p = 0.401\pi$ |
| 遷移域幅 | $\omega_d = 0.145\pi$ |

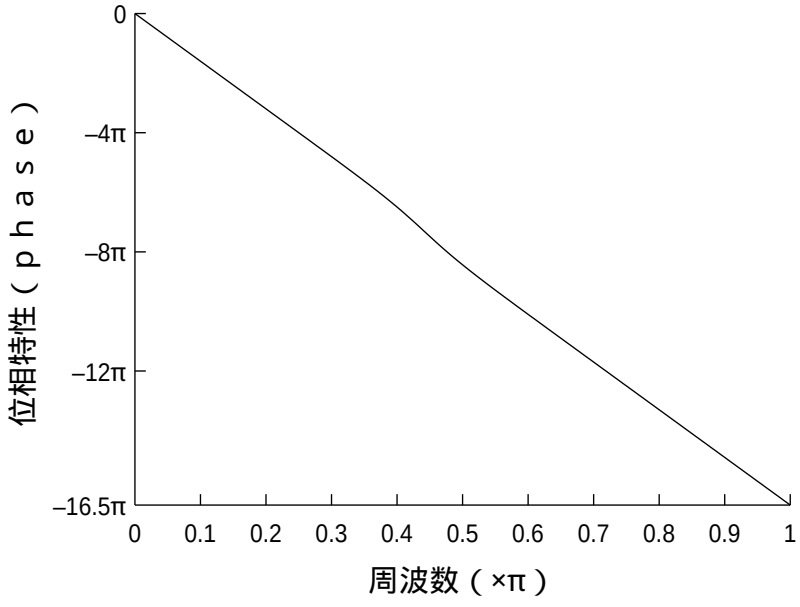
振幅特性、位相特性および群遅延特性はそれぞれ図 3.4(a)、図 3.4(b)、図 3.4(c) のようになる。

図 3.4(c) の群遅延特性と式 (2.26) の安定条件から、設計されたフィルターは安定であることがわかる。

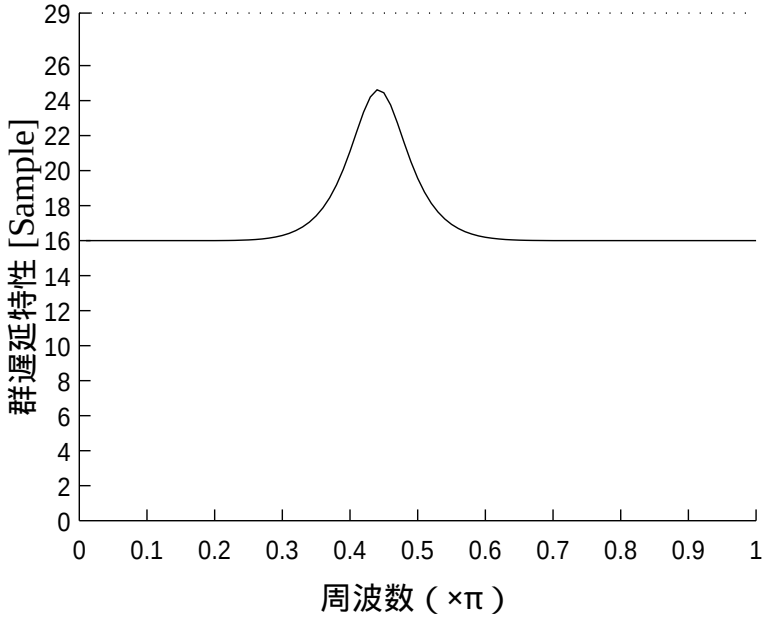
また、振幅特性 (図 3.4(a)) と群遅延特性 (図 3.4(c)) には、本仕様とほぼ同じ振幅特性を持つ、FIR フィルタの例も合わせてプロットしてある。この場合、FIR フィルタの次数は 58 次となり、本構造の IIR フィルタの方が明らかに低次で、小さい群遅延で実現できることがわかる。




(a) 振幅特性




(b) 位相特性




(c) 群遅延特性

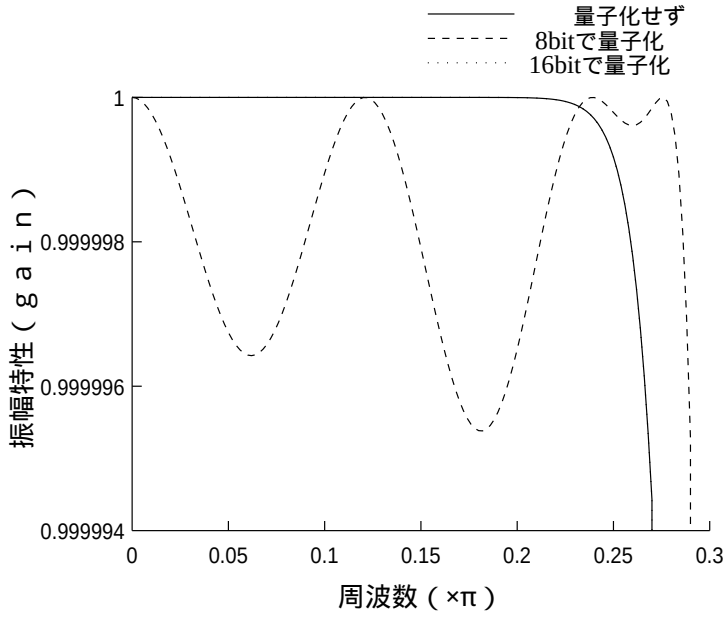
図 3.4　最大平坦型低域通過フィルタの設計例

### 3.3.6 係数感度の検討

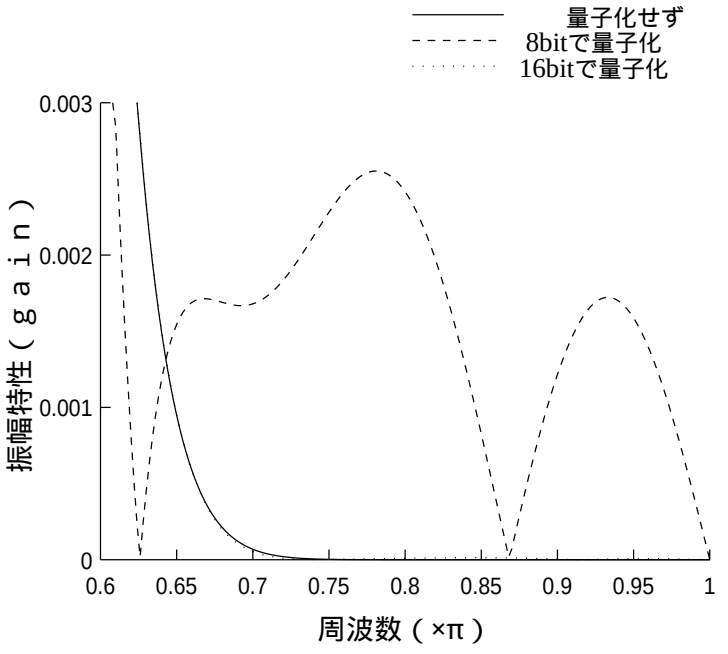
前節の設計例に対し、フィルタ係数の量子化による影響を検討する。量子化は2進数8bitと2進数16bitの2種類とする。8bitで量子化した場合、フィルタ係数のうち$a_8 \sim a_{17}$が0となり、実質的に7次のフィルタと同等となる。また、16bitで量子化した場合、フィルタ係数のうち$a_{15} \sim a_{17}$が0となり、実質的に14次のフィルタと同等となる。

通過域・阻止域における振幅特性の比較結果を、それぞれ図3.5(a)、図3.5(b)に示す。16bitで量子化する場合には、通過域・阻止域とも影響はほとんど見られなかった。8bitで量子化する場合には、若干の影響が出るが、実用上ほとんど問題にならないと考えられ、本構造の低係数感度性が確認される。

なお、量子化した際に、0となるフィルタ係数があるということはそのような係数の個数だけ次数を無駄にしているように思えるが、そうではない。次数を下げると、遷移域幅$\omega_d$は広くなるうえ、通過域端周波数$\omega_p$を制御するパラメータ$l\ (1 \sim n-1)$を細かく設定することもできない。従って、所望の遷移域幅と通過域端周波数を得るために次数が必要になるのである。しかし、フィルタ係数を量子化すると振幅最大平坦性は、もはや成り立たない。




(a) 通過域




(b) 阻止域

図 3.5 係数感度の比較 (振幅特性)

## 3.4　最大平坦型高域通過フィルタの設計

### 3.4.1　高域通過フィルタとなるための条件

高域通過フィルタになるためには、表2.1より、$H_-(z)$ を用いて $d = \pm 1$ とすればよい。このとき、

$$\begin{cases} H_-(0) &= 0 \\ H_-(\pi) &= 1 \end{cases}$$

は構造的に決定されている。

### 3.4.2　設計法

本構造では、2 重相補出力が得られるので、高域通過フィルタは低域通過フィルタとして設計することができる。ただし、通過域と阻止域とでは、割り当てる自由度とその結果得られる平坦度の関係が異なる点に注意しなければならない。

ある設計パラメータ $n = \widehat{n}$、$l = \widehat{l}$ で作成した低域通過フィルタの振幅特性を $\widehat{H}_+(\omega)$ とし、$n = \widehat{n}$、$l = \widehat{n} - \widehat{l}$ で作成した高域通過フィルタの振幅特性を $\widehat{H}_-(\omega)$ とすれば、

$$\widehat{H}_+(\omega) = \widehat{H}_-(\pi - \omega) \tag{3.23}$$

が成立し、振幅特性$\widehat{H}_+(\omega)$、$\widehat{H}_-(\omega)$ のグラフは $\omega = \dfrac{\pi}{2}$に関して対称なグラフとなる。

高域通過フィルタの設計に与える仕様と設計手順は以下のようになる。

＜仕様＞

通過域端周波数　$\omega_p$

遷移域幅　　$\omega_d$

< 設計手順 >

1. 通過域端周波数 $\omega_p$ を

$$\omega_{pL} = \pi - \omega_p \tag{3.24}$$

を用いて、低域通過フィルタにおける通過域端周波数 $\omega_{pL}$ に変換する。

2. $\omega_{pL}$ と $\omega_d$ を用いて低域通過フィルタの場合の $\widehat{n}$、$\widehat{l}$ を決定する。

3. $\widehat{l} \Leftarrow \widehat{n} - \widehat{l}$ として連立方程式を解き、$a_i$ を決定する。

4. $H_-(z)$ を出力として用いる。

### 3.4.3 設計例

以下の仕様のフィルタを設計する。

< 仕様 >

| | |
|---|---|
| 通過域端周波数 | $\omega_p = 0.618\pi$ |
| 遷移域幅 | $\omega_d = 0.143\pi$ |

これは、$\omega_{pL} = \pi - \omega_p = 0.382\pi$ となり、先に設計した、低域通過フィルタの設計に帰着される。

< 最終結果 >

| | |
|---|---|
| フィルタ次数 | $n = 17$ |
| $\omega = 0$ に割り当てる自由度 | $l = 10$ |
| 通過域端周波数 | $\omega_p = 0.599\pi$ |
| 遷移域幅 | $\omega_d = 0.145\pi$ |

振幅特性は図 3.6のようになる。群遅延特性は、低域通過フィルタの図 3.4(c) と同じである。従って、この設計例の場合も安定なフィルタが得られる。

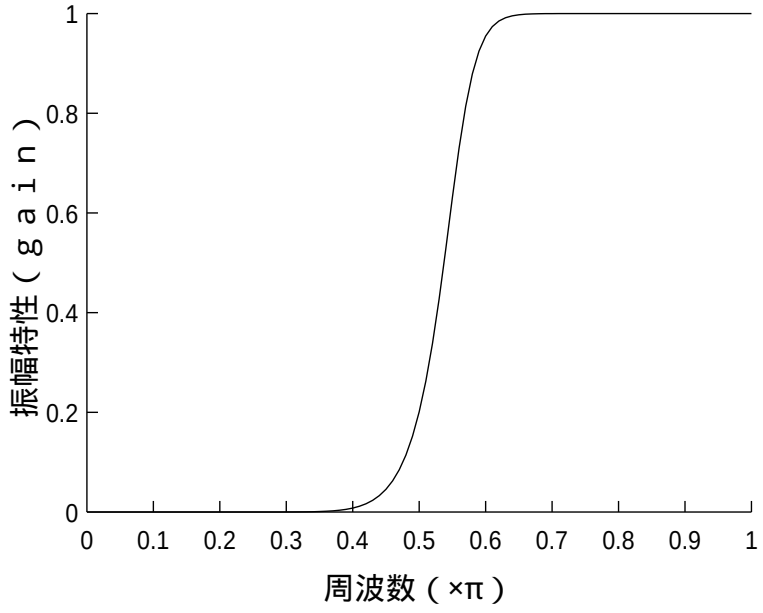



図 3.6　最大平坦型高域通過フィルタの設計例（振幅特性）

## 3.5　最大平坦型帯域除去フィルタの設計

### 3.5.1　帯域除去フィルタとなるための条件

帯域除去フィルタになるためには、表2.1より、$H_+(z)$ を用いて $d = \pm 2$ とすればよい。このとき、

$$\begin{cases} H_+(0) &= 1 \\ H_+(\pi) &= 1 \end{cases}$$

は構造的に決定されている。さらに、$\omega = \omega_t$での振幅特性が $0$ になるためには $\Delta\theta(\omega_t) = (\operatorname{sign} d)\ \pi$となる必要がある。ただし、

$$\operatorname{sign} x \equiv \frac{x}{|x|} \tag{3.25}$$

とする。この条件は式 (2.16) より次のような式に書き換えられる。

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left( \sin(i\omega_t) - \tan\left( \frac{(\operatorname{sign} d)\ \pi - d\omega_t}{2} \right) \cos(i\omega_t) \right) = 0 \tag{3.26}$$

### 3.5.2 伝達関数の決定

図 2.1において、全域通過回路の次数を $n$ とし、$d$ の値は定まっていると仮定すると、このフィルタの自由度は全域通過回路の係数 $a_i$ $(1 \leq n)$ の $n$ である。自由度のうちの一つは $\omega = \omega_t$での振幅を 0 にするために使われる。そこで残りの $(n-1)$ の自由度を $\omega = 0$ での最大平坦化のために $l$ 割り当て、$\omega = \pi$での最大平坦化のために $m$、阻止域 $(\omega = \omega_t)$ での最大平坦化のために $u$ 割り当てることにする $(l+m+u = n-1)$。このとき、最大平坦条件は、式 (3.14)、式 (3.16)、式 (3.13) より、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i + \frac{d}{2}\right)^{2j-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l) \tag{3.27}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left(i + \frac{d}{2}\right)^{2j-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.28}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i + \frac{d}{2}\right)^{j} \sin\left(\left(i + \frac{d}{2}\right)\omega_t - \frac{(\operatorname{sign} d)\ \pi}{2} + \frac{j\pi}{2}\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, u) \tag{3.29}$$

のような式となる。ただし、$\omega = \omega_t$では、3.5.1節より$\Delta\theta(\omega_t) = (\operatorname{sign} d)\ \pi$であるので、式 (3.13) にはこれを代入した。

$\omega = \omega_t$での振幅を 0 にするための条件 (式 (3.26)) と最大平坦のための条件 (式 (3.27) ～ 式 (3.29)) とを組み合わせて、最終的に $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ を決定するために解くべき連立方程式を行列の形で表すと

$$AX = b \tag{3.30}$$

$$A = \begin{pmatrix}
y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_n \\
y_1^3 & y_2^3 & \cdots & y_i^3 & \cdots & y_n^3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_1^{2l-1} & y_2^{2l-1} & \cdots & y_i^{2l-1} & \cdots & y_n^{2l-1} \\
-y_1 & y_2 & \cdots & (-1)^i y_i & \cdots & (-1)^n y_n \\
-y_1^3 & y_2^3 & \cdots & (-1)^i y_i^3 & \cdots & (-1)^n y_n^3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
-y_1^{2m-1} & y_2^{2m-1} & \cdots & (-1)^i y_i^{2m-1} & \cdots & (-1)^n y_n^{2m-1} \\
p_{11} y_1 & p_{21} y_2 & \cdots & p_{i1} y_i & \cdots & p_{n1} y_n \\
p_{12} y_1^2 & p_{22} y_2^2 & \cdots & p_{i2} y_i^2 & \cdots & p_{n2} y_n^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
p_{1u} y_1^u & p_{2u} y_2^u & \cdots & p_{iu} y_i^u & \cdots & p_{nu} y_n^u \\
st_1 & st_2 & \cdots & st_i & \cdots & st_n
\end{pmatrix} \tag{3.31}$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

$$y_i = \left( i + \frac{d}{2} \right) \tag{3.33}$$

$$p_{ij} = \sin\left( \left( i + \frac{d}{2} \right) \omega_t - \frac{(\operatorname{sign} d)\ \pi}{2} + \frac{j\pi}{2} \right) \tag{3.34}$$

$$st_i = \sin(i\omega_t) - \tan\left( \frac{(\operatorname{sign} d)\ \pi - d\omega_t}{2} \right) \cos(i\omega_t) \tag{3.35}$$

$$b = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -y_0^3 \\ \vdots \\ -y_0^{2l-1} \\ -y_0 \\ -y_0^3 \\ \vdots \\ -y_0^{2m-1} \\ -p_{01}y_0 \\ -p_{02}y_0^2 \\ \vdots \\ -p_{0u}y_0^u \\ -st_0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

となる。この連立方程式は解析的に解くことが難しいため、数値を代入して計算機を用いて解くより他ない。

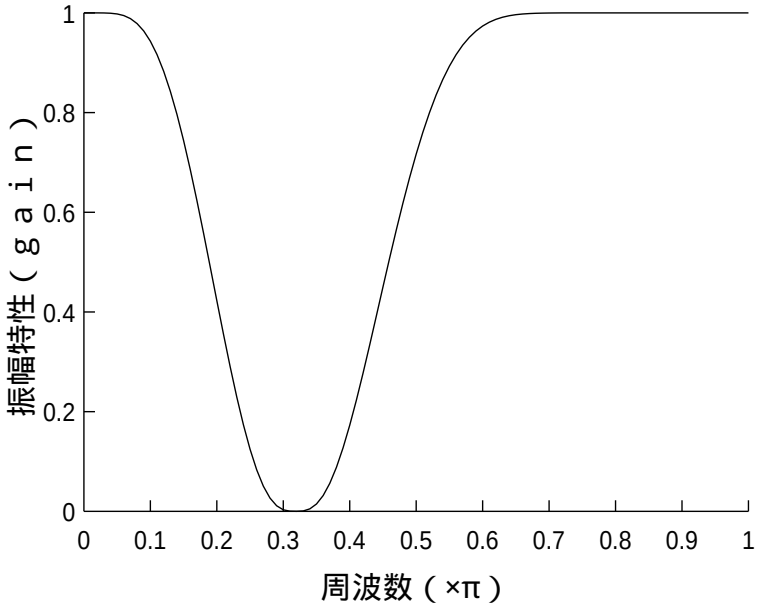
### 3.5.3 設計例

設計パラメータが以下のような帯域除去フィルタを設計する。

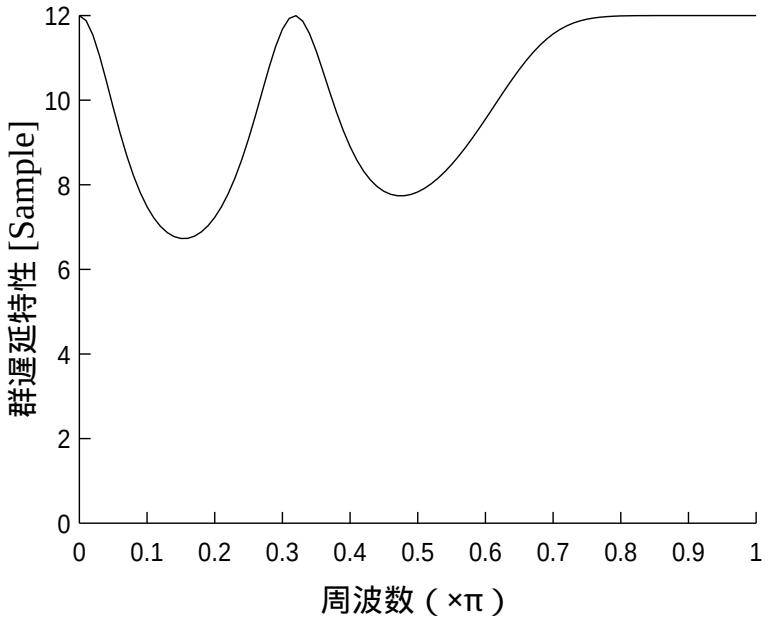
<設計パラメータ>

| | |
|---|---|
| $\omega = 0$ での平坦性のために割り当てる自由度 | $l = 1$ |
| $\omega = \omega_t$での平坦性のために割り当てる自由度 | $u = 2$ |
| $\omega = \pi$での平坦性のために割り当てる自由度 | $m = 6$ |
| フィルタ次数 | $n = 10$ |
| 除去したい周波数 | $\omega_t = 0.318\pi$ |
| 全域通過回路と遅延器との次数差 | $d = 2$ |

設計した帯域除去フィルタの振幅特性と群遅延特性をそれぞれ図 3.7(a) と図 3.7(b) に示す。図 3.7(b) の群遅延特性と式 (2.26) の安定条件から、設計したフィルターは安定であることが確認できる。




(a) 振幅特性




(b) 群遅延特性

図 3.7　最大平坦型帯域除去フィルタの設計例

### 3.5.4　設計法の検討

帯域除去フィルタの設計では、除去したい周波数が$\frac{\pi}{2} \pm 0.2$ 程度ならほとんどの場合、設計が可能である。それよりも $0$ や $\pi$ に近い周波数を除去したい場合には振幅特性を制御できなくなる、すなわち振幅特性に余計なノッチやリプルなどが生じる場合がある[†]。これには次のような理由が考えられる。

- $\omega = 0$ での最大平坦のために割り当てる自由度 $l$ を決めると振幅の減衰の仕方はある程度拘束されるはずで、それを考慮に入れないで阻止域中央の周波数 $\omega_t$や割り当てる自由度 $u$ を与えても無理が生じてしまう。
- 同様に、$m$ に無関係に $\omega_t$、$u$ を決定できないはずである。

従って現状では方法論としての設計法は確立できない。

## 3.6　最大平坦型帯域通過フィルタの設計

### 3.6.1　帯域通過フィルタとなるための条件

帯域通過フィルタになるためには、表 $2.1$より、$H_-(z)$ を用いて $d = \pm 2$ とすればよい。このとき、

$$\begin{cases} H_-(0) &= 0 \\ H_-(\pi) &= 0 \end{cases}$$

は構造的に決定されている。さらに、$\omega = \omega_t$での振幅特性が $1$ になるためには $\Delta\theta(\omega_t) = (\operatorname{sign} d)\ \pi$となる必要がある。これは、帯域除去フィルタの場合と同じ条件式 (式 $(3.26)$) である。

### 3.6.2　設計例

設計パラメータが以下のような帯域通過フィルタを設計する。これは、先の帯域除去フィルタの設計例を帯域通過型にしたものである。

---

[†]付録 II 参照

＜設計パラメータ＞

| | |
|---|---|
| $\omega = 0$ での平坦性のために割り当てる自由度 | $l = 1$ |
| $\omega = \omega_t$での平坦性のために割り当てる自由度 | $u = 2$ |
| $\omega = \pi$での平坦性のために割り当てる自由度 | $m = 6$ |
| フィルタ次数 | $n = 10$ |
| 通過させたい周波数 | $\omega_t = 0.318\pi$ |
| 全域通過回路と遅延器との次数差 | $d = 2$ |

設計した帯域通過フィルタの振幅特性を図 3.8に示す。群遅延特性は、帯域除去フィルタの図 3.7(b) と同じである。

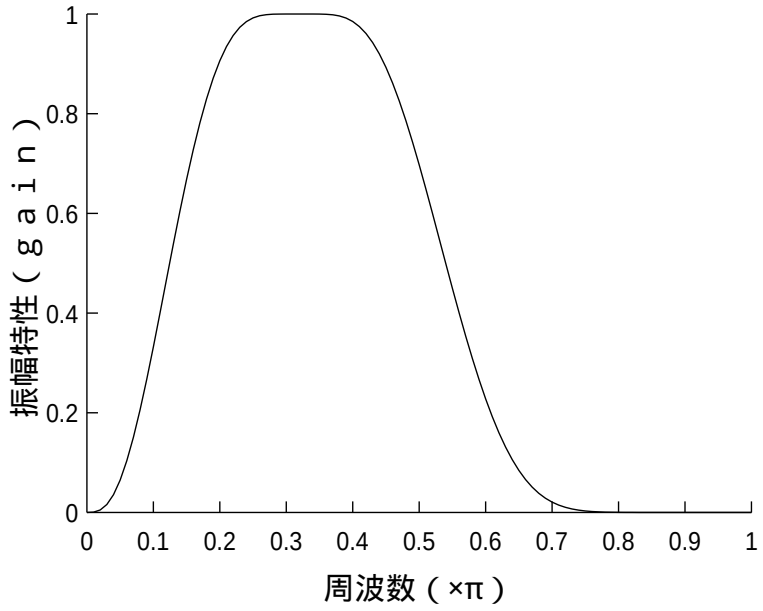



図 3.8　最大平坦型帯域通過フィルタの設計例（振幅特性）

### 3.6.3　設計法の検討

本構造では、2 重相補出力が得られるので、帯域通過フィルタは帯域除去フィルタとして設計することができる。ただし、通過域と阻止域が逆になるため、$\omega = 0$、$\omega_t$、$\pi$に割り当てる自由度を互いに変える必要がある。

現状では、帯域除去フィルタの設計法が確立していないため、帯域通過フィルタを系統的に設計することはできない。

# 第 4 章　通過域最大平坦・阻止域等リプル近似型フィルタの設計

フィルタの実用上の問題を考えると、通過域の最大平坦の重要性は高いが、阻止域に関しては必ずしも最大平坦である必要性はない。阻止域を等リプル近似にすることで通過域から阻止域への遷移域幅が狭くなれば、その方がはるかに実用性が高い。

等リプル近似には大きく分けて

- Remez 型のアルゴリズム [1, 3] の適用
- 線形計画法の応用
- $L_\infty$ 非線形最適化法 [10]

の 3 つの方法がある。本研究では第 1 の Remez 型のアルゴリズムによる方法を用いる。

IIR ディジタルフィルタの等リプル近似のために Remez 型のアルゴリズムを用いる際の問題点は、各ステップで解かねばならない方程式が非線形な連立方程式となってしまう点である。本研究では、非線形性の高い振幅特性そのものを等リプル近似するのではなく、振幅特性を特徴づけている$\Delta\theta(\omega)$ を等リプル近似することを考える。さらに、連立方程式が簡単に解けるように$\Delta\theta(\omega)$ ではなく、$\varphi(\omega) = \cot\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right)$ を等リプル近似する。

## 4.1 Remezのアルゴリズム

Remezのアルゴリズムは、等リプル近似を行うためのアルゴリズムで、以下のような手順をとる[1, 11]。

1. 極値をとる適当な周波数を$(0, \pi)$より$(r+1)$個選ぶ(initial guess)。
2. 各周波数点での目的関数からの重み付き誤差の絶対値が等しく$\delta$ (未知数)となり、隣り合う極値の符号が交番するように、近似する関数の係数を決める。未知数は係数$p_i$ $(1 \leq i \leq r)$の$r$個と$\delta$の計$(r+1)$個で方程式の数も$(r+1)$本である。
3. 得られた振幅特性は与えられた周波数点での誤差は$\delta$であるが、そこが極値であるとは限らないので、その極値を探索する。極値点が与えられた周波数点と等しければ最適等リプル近似が得られたので次へ進む。極値点が変化していれば、新たな極値点をもって前へ戻る。
4. 得られた特性が仕様を満足すれば終了。リプルが仕様より大きければフィルタの次数を上げて最初からやり直す。

## 4.2 等リプル近似の条件式

フィルタの阻止域の振幅特性を等リプル近似する場合には、目的特性からの誤差の絶対値を$\delta$とすると、フィルタ係数$a_i$を決定するために

$$\begin{aligned} H_+(\omega_j) &= \cos\left(\frac{\Delta\theta(\omega_j)}{2}\right) \\ &= (-1)^{j+1}\delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (p \text{はリプルの個数}) \end{aligned}$$

というフィルタ係数$a_i$に関する非線形連立方程式を解くことになる。これは、計算速度、収束性、計算誤差などの点で望ましくない。そこで、振幅特性の$\cos$の中身である$\Delta\theta(\omega)$を用いる。$\Delta\theta(\omega)$の等リプル近似の条件は、

$$\Delta\theta(\omega_j) = d\pi - (\operatorname{sign} d)\,(-1)^{j+1}\delta$$

となり、上式をさらに変形して、

$$d\omega_j + 2\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin(i\omega_j)}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(i\omega_j)}\right) = d\pi + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin(i\omega_j)}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(i\omega_j)} = \tan\left(\frac{d\pi + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta - d\omega_j}{2}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sin(i\omega_j) - \tan\left(\frac{d\pi + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta - d\omega_j}{2}\right)\cos(i\omega_j)\right) = 0 \qquad (4.1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (p \text{ はリプルの個数})$$

が得られる。これにより、$a_i$に関しては線形な方程式となるが、まだ問題点が 2 つある。

- tan は不連続な関数のため、$a_i$によっては$\Delta\theta(\omega)$ が不連続になる場合が起きやすい。
- 式 (4.1) は $\delta$ に関しては非線形な方程式である。

そこで、最初の問題点を解決するため$\Delta\theta(\omega)$ を等リプル近似するのではなく、$\varphi(\omega) = \cot\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right)$を等リプル近似するとことを考える。$\varphi(\omega)$ が等リプルとなれば、$\Delta\theta(\omega)$ も等リプルとなることは明らかである。図 4.1に、$H_+(\omega)$ と $\cot\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right)$ の一例を示す。

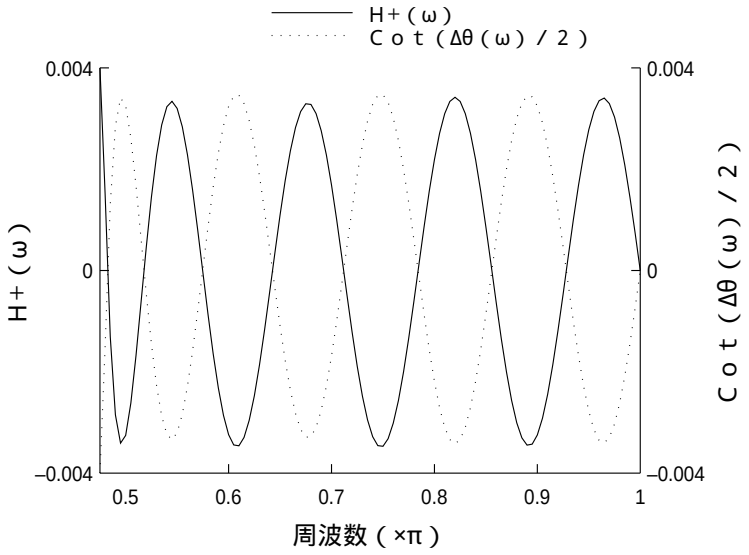



**図 4.1** $H_+(\omega)$ と $\cot\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right)$ $(n=16、\ d=-1)$

さて、$\varphi(\omega)$ は、

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega) &= \cot\left(\frac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right) \\
&= \cot\left(\frac{d\omega}{2} - \theta_H(\omega)\right) \qquad \text{(式 (2.15) より)} \\
&= \frac{1+\tan\left(\dfrac{d\omega}{2}\right)\tan(\theta_H(\omega))}{\tan\left(\dfrac{d\omega}{2}\right)-\tan(\theta_H(\omega))}
\end{aligned}$$

となるので、解くべき連立方程式は

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega_j) &= (\operatorname{sign} d)\ (-1)^{j+1}\delta \\
1+\tan\left(\frac{d\omega_j}{2}\right)\tan(\theta_H(\omega_j)) &= -(\operatorname{sign} d)\ (-1)^{j}\delta\left(\tan\left(\frac{d\omega_j}{2}\right)-\tan(\theta_H(\omega_j))\right)
\end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{d\omega_j}{2}\right)+\sin\left(\frac{d\omega_j}{2}\right)\left(-\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i\sin(i\omega_j)}{\sum_{i=0}^{n}a_i\cos(i\omega_j)}\right)$$

$$= -(\operatorname{sign} d)\ (-1)^j\delta\left(\sin\left(\frac{d\omega_j}{2}\right)-\cos\left(\frac{d\omega_j}{2}\right)\left(-\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i\sin(i\omega_j)}{\sum_{i=0}^{n}a_i\cos(i\omega_j)}\right)\right)$$

(式 (2.7) より)

と変形できるため、結局、

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\cos\left((i+\frac{d}{2})\omega_j\right)+(\operatorname{sign} d)\ (-1)^j\delta\left(\sin\left((i+\frac{d}{2})\omega_j\right)\right)\right) = 0 \qquad (4.2)$$

となる。これにより不連続な関数 tan は除去できる。

## 4.3　阻止域等リプル近似フィルタの伝達関数の決定

前節で導出した方程式と通過域最大平坦の条件を組み合わせて、最終的に解かねばならない連立方程式は以下のようになる。

< 低域通過フィルタの場合 >

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\cos\left((i+\frac{d}{2})\omega_j\right)+(\operatorname{sign} d)\ (-1)^j\delta\left(\sin\left((i+\frac{d}{2})\omega_j\right)\right)\right)=0 \qquad (4.3)$$

$$(j=1,2,\ldots,p)$$

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\left(i+\frac{d}{2}\right)^{2j-1}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,l) \qquad (4.4)$$

$$(\omega_s=\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_p<\pi) \qquad (l+p=n+1)$$

< 高域通過フィルタの場合 >

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left( \cos\left( \left( i + \frac{d}{2} \right) \omega_j \right) + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta \left( \sin\left( \left( i + \frac{d}{2} \right) \omega_j \right) \right) \right) = 0 \qquad (4.5)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left( i + \frac{d}{2} \right)^{2j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (4.6)$$

$$(0 < \omega_p < \ldots < \omega_2 < \omega_1 = \omega_s) \qquad (l + p = n + 1)$$

ここで、$\omega_s$は阻止域端周波数である。ただし、帯域除去フィルタ・帯域通過フィルタは、3.5.4節にある事情から、阻止域等リプル近似では対象から外した

未知数は、$a_1 \sim a_n$と $\delta$ の $(n+1)$ 個である。ただし、上式は$a_i\delta$の項があり、未知数全てに対しては線形連立方程式でないため、解くために工夫が必要である。本研究では、この解法として次のような方法を提案する。

1. $\delta$ の初期値を適当に決める。
2. 与えられた $\delta$ に関し、$\omega_j = \omega_s$(阻止域端) における等リプル近似の条件式を除く、$n$ 本の式を線形連立方程式として $a_1 \sim a_n$について解く。
3. 求められた $a_i$と $\delta$ を $\omega_j = \omega_s$(阻止域端) における等リプル近似の条件式の左辺に代入する。
4. 得られた値 (誤差 (error)) が 0 となるように、$\delta$ を更新し繰り返す。

この方法を用いると、線形方程式を繰り返し解くことにより、非線形方程式を解くことができる。本研究では、$\delta$ の探索方法には最も原始的な方法、すなわち、$\delta$ を小さい値から少しづつ変えながら誤差が 0 となるところを探すという方法を用いる。リプルはなるべく小さい方が良いから、 $\delta$ は小さい値から探索するのが良いと考えられる。この点で 2 分法などはあまり得策とは言えない。また、Remez 型のアルゴリズムでは $\delta$ を更新しながら、繰り返し連立方程式を解くが、毎回 $\delta$ は大きくなるはずであるから、$\delta$ の探索にあたっては、0 から探索しなくとも、前回の $\delta$ から探索すれば、計算量は軽減される。

## 4.4　本研究で用いる等リプル近似のアルゴリズム

4.1節 ~ 4.3節をまとめて、本研究で提案する

全域通過回路と遅延器の並列構造に対する、通過域最大平坦・阻止域等リプル近似型フィルタの設計法

をまとめると、図 4.2のようなフローチャートになる。

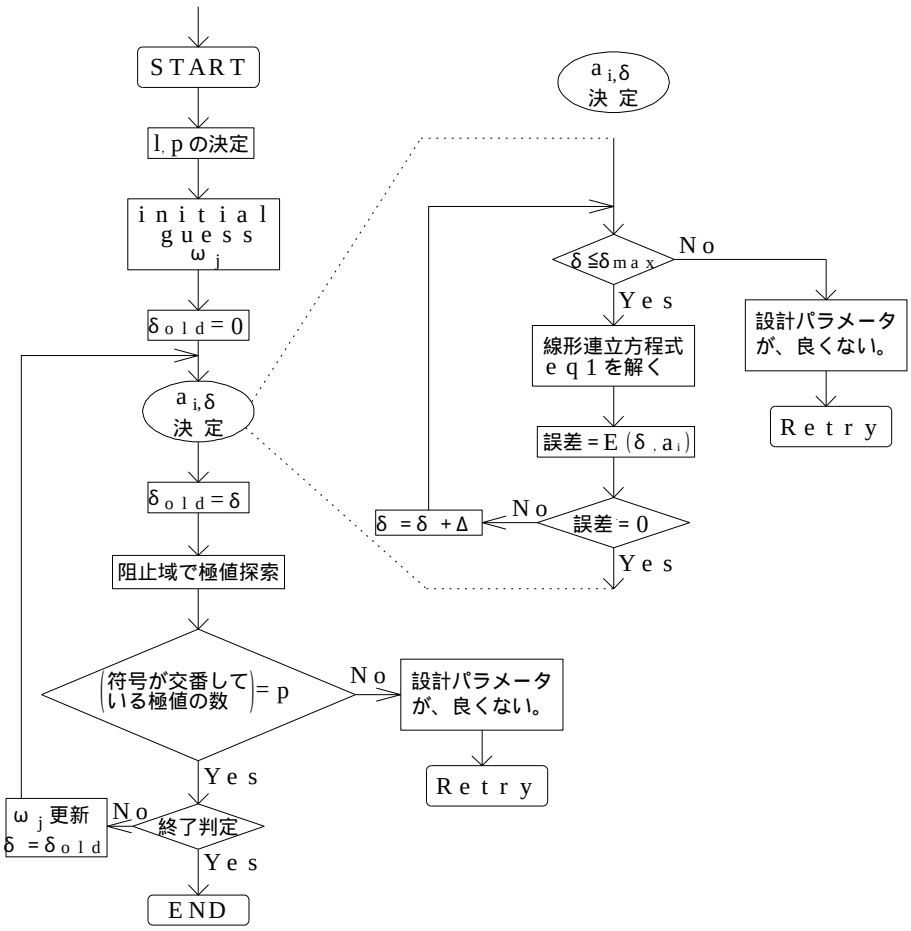



図 4.2　通過域最大平坦・阻止域等リプル近似型フィルタ設計アルゴリズム

以下に、フローチャート中の用語の説明を加える。

- initial guess は、極値をとる $\omega$ つまり $\omega_j$の初期値の推測で、本研究では単純に低域通過フィルタなら $\omega_s \sim \pi$を等分割し、高域通過フィルタなら $0 \sim \omega_s$を等分割している。他の方法としては、チェビシェフ多項式の根を用いる方法や、零点を等分割で推定していったん極値を探索してその極値をとる $\omega$ を $\omega_j$ とする方法などが考えられる。

- $\delta_{max}$は、$\cot\left(\dfrac{\Delta\theta(\omega)}{2}\right)$ のリプルの最大値のことである。$l$、$p$、$\omega_s$の組み合わせによっては、$\delta$ が相当大きくならないと非線形連立方程式が解けない場合があったり、$\delta$ の探索のピッチが広すぎると解を見つけられなかったりする(4.6節参照)。そのような場合にもアルゴリズムを一定時間で終了させるために設定する。

- eq1 とは、以下のような $\omega_j = \omega_s$(阻止域端) における式を除く、$n$ 本の式である。

  < 低域通過回路の場合 >

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\cos\Big((i+\frac{d}{2})\omega_j\Big) + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta \left(\sin\Big((i+\frac{d}{2})\omega_j\Big)\right)\right) = 0$$
$$(j = 2, 3, \ldots, p, \omega_1 = \omega_s)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(i+\frac{d}{2}\right)^{2j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (l + p = n + 1)$$

  < 高域通過回路の場合 >

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\cos\Big((i+\frac{d}{2})\omega_j\Big) + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta \left(\sin\Big((i+\frac{d}{2})\omega_j\Big)\right)\right) = 0$$
$$(j = 2, 3, \ldots, p, \omega_1 = \omega_s)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i \left(i+\frac{d}{2}\right)^{2j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (l + p = n + 1)$$

- $E(\delta, a_i)$ とは、以下のような $\omega_j = \omega_s$(阻止域端) における式の左辺である。

$$E(\delta, a_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\cos\left(\left(i+\frac{d}{2}\right)\omega_s\right) + (\operatorname{sign} d)\ (-1)^j \delta \left(\sin\left(\left(i+\frac{d}{2}\right)\omega_s\right)\right)\right)$$

- $\Delta$は、$\delta$ を少し増加させる微少量である。
- 阻止域で極値を探索したときに、$l$、$p$、$\omega_s$の組み合わせや極値探索のピッチが広すぎる場合などに符号が交番している極値が$p$個にならない場合がある(4.6節参照)。このような場合には、次のステップで方程式の本数が不足し、その先のアルゴリズムは進められないため、条件分岐を設定する。
- 非線形連立方程式が解けない場合や極値の数が不足する場合は、$\delta$ の探索のピッチや極値の探索のピッチを細かくしてみる。もしくは、設計パラメータ$l$、$p$ を変えて始めからやり直す。

## 4.5 設計例

例として、以下のような仕様のフィルタを設計する。

< 仕様 >

低域通過フィルタ

フィルタ次数　　$n = 16$

阻止域端周波数　　$\omega_s = 0.477\pi$

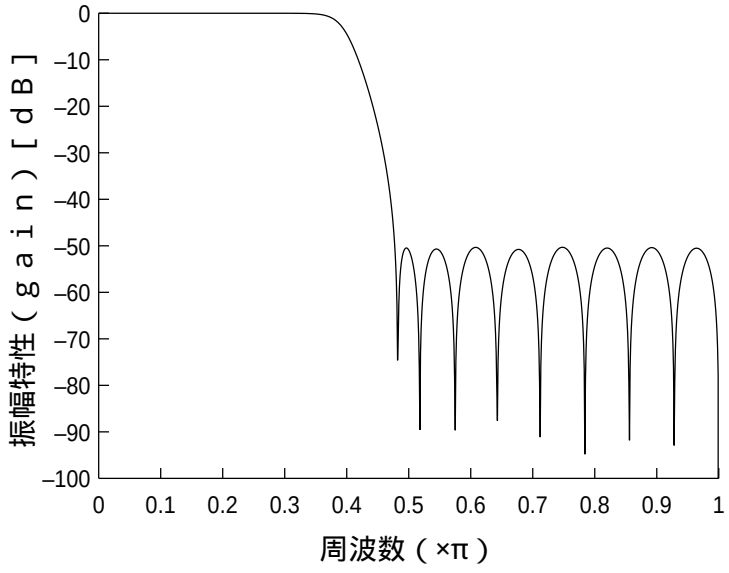
< 設定した設計パラメータ >

$\omega = 0$ に割り当てる自由度　$l = 8$

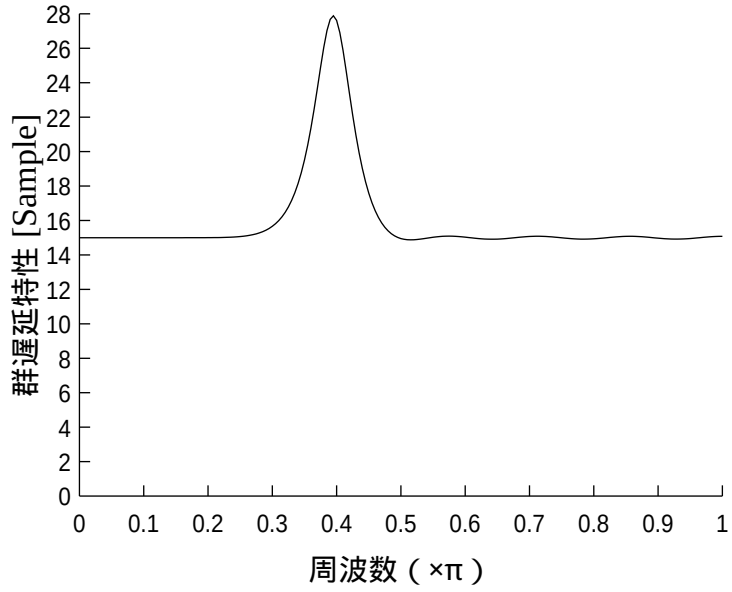
阻止域に割り当てる自由度　$p = 9$　(リプルの数は阻止域端を含めて 9 個)

得られた振幅特性を図 4.3(a) に、群遅延特性を図 4.3(b) に示す。

図 4.3(b) の群遅延特性と式 (2.26) の安定条件から、このフィルターは安定であることがわかる。




(a) 振幅特性




(b) 群遅延特性

図 4.3 通過域最大平坦近似・阻止域等リプル近似型低域通過フィルタの設計例

## 4.6 問題点

帯域除去フィルタ・帯域通過フィルタの最大平坦近似の場合に振幅特性が制御できなくなる設計パラメータが存在するように、この場合にも同様の現象が発生する。設計パラメータによっては、阻止域での符号が交番する極値が不足し、阻止域において全域通過回路と遅延器の位相差$\Delta\theta(\omega)$が$0$になる点が出現し、振幅が$1$となるようなリプルが発生する[†]。また、非線形連立方程式の解が存在しない場合もある。原因として考えられることは、次のようなことである。

- 通過域での最大平坦のために割り当てる自由度を決めると振幅の減衰の仕方はある程度拘束されるはずで、それを考慮に入れないで阻止域端の周波数を与えても無理が生じてしまう。
- 設計パラメータとinitial guessの方法の組み合わせによって、このような現象が発生する場合と発生しない場合とがあることから、initial guessの方法にも問題があると思われる。

## 4.7 通過域・阻止域最大平坦型フィルタとの遷移域幅の比較

前節の設計例では、

| | | |
|---|---|---|
| 通過域端周波数 | (振幅 $0.95$ ) | $0.3646\pi$ |
| 阻止域端周波数 | (振幅 $0.05$ ) | $0.4531\pi$ |
| 遷移域幅 | | $0.0885\pi$ |

である。これと同程度の遷移域幅を通過域・阻止域ともに最大平坦型のフィルタで実現しようとすると、3.3.3節の$\omega_d$と$n$の関係式より、

$$d=-1、n=34\sim 45$$

となる。実際にフィルタを作成してみたところ、$n=44$、$l=12$で$\omega_d=0.0919\pi$程度となる。阻止域を等リプル近似した方が半分以下の次数で同程度の遷移域幅が得られることがわかる。

[†]付録II参照

## 4.8　阻止域等リプル近似の場合の 2 重相補出力

阻止域を等リプル近似した低域通過フィルタを作成した場合、$H_{-}(z)$ の出力から得られるのは、阻止域を等リプル近似した高域通過フィルタではないことに注意しなければならない。得られるものは、阻止域を最大平坦近似し、通過域を等リプル近似したものである。

# 第 5 章　結論

## 5.1　結論

本研究では、全域通過回路と遅延器との並列構造に対して、振幅特性を最大平坦近似する方法について考察を行った。

まず、通過域・阻止域ともに最大平坦近似となるフィルタの設計法を考察し、フィルタ係数は線形連立方程式の解として決定できることを示した。低域通過フィルタおよび高域通過フィルタに関しては、与えられた仕様から設計パラメータを与える近似式を導出し、設計法を確立した。しかし、帯域除去フィルタおよび帯域通過フィルタに関しては、設計パラメータにより不完全な振幅特性を持つものがあるということが確認されたため、設計法の確立には至らなかった。

次に、通過域は最大平坦近似、阻止域は等リプル近似であるフィルタの設計法を検討した。等リプル近似は、Remez 型のアルゴリズムを用いたが、IIR フィルタでは非線形連立方程式を解かねばならないという問題点がある。これに対して、振幅そのものを等リプル近似するのではなく、振幅に代わる関数を取出し、さらに、tan 関数の不連続性を回避するためと非線形性を低減するため、先の関数の cot をとり、これを等リプル近似することを考えた。また、非線形方程式を直接解くと、計算速度や計算誤差などの問題があるため、この非線形方程式を線形方程式の繰り返しで解くことにより、高速に、しかも誤差を小さく計算する方法を提案し、その成果を確認した。しかしながら、この場合も設計パラメータによって不完全な振幅特性を持つものが確認され、設計法の完全な確立には至らなかった。

## 5.2 今後の課題

今後の課題としては、次のようなものが考えられる。

1. 通過域・阻止域ともに最大平坦近似の低域通過フィルタ・高域通過フィルタに関しては次のような課題が考えられる。

   - 仕様から設計パラメータを与える近似式は、次数が上がるにつれ誤差が大きくなる傾向がある。より高い次数の設計データを集め、より正確な近似式を導出すれば、より安定な設計法が確立される。
   - $l \neq m$ の場合にも、行列で表された連立方程式が解けるような解法を見つけ解析的に解けば、より確実な設計法が確立できる。

2. 通過域・阻止域ともに最大平坦近似の帯域除去フィルタ・帯域通過フィルタに関しては次のような課題が考えられる。

   - 所望の振幅特性が得られなくなる設計パラメータの限界値を見つけ、その範囲内で設計する方法を確立する (この限界に関しては、すでに設計法の確立した低域通過フィルタ・高域通過フィルタの設計データが活用できるはずである)。
   - 遷移域の振幅特性に対する条件を付加する。
   - 最大平坦条件について再考察する [9]。

3. 通過域最大平坦近似・阻止域等リプル近似のフィルタに関しては次のような課題が考えられる。

   - 所望の振幅特性が得られなくなる設計パラメータの限界値を見つけ、その範囲内で設計する設計法を確立する。
   - initial guess の方法について再検討する。
   - 帯域除去フィルタ・帯域通過フィルタに関しては、通過域・阻止域ともに最大平坦近似の場合の設計法の確立を待ち、$\omega_t$ と $l$ および $m$ との関係を十分考察した上で本研究で用いた方法を試みる必要がある。その上で設計法を確立する。

4. IIR フィルタでは安定性が問題となる。本研究では、今のところ所望の振幅特性が得られた場合には必ず安定であることは確認している。もっと、理論的に安定性について論じる必要性がある。

# 謝 辞

本研究を進めるにあたり、親切に御指導くださいました藤井信生教授に深く感謝いたします。また、多くの御助言・御指導をいただいた西原明法助教授ならびに高木茂孝助教授に感謝いたします。さらに、本研究の細部に渡り、多大な御援助、親身の御指導をいただきました、藤井研究室の S.Samadi 氏、吉田俊之助手、西原研究室の杉野暢彦助手に深く感謝いたします。最後に、藤井・西原・高木研究室の皆様に御礼申し上げます。

# 参考文献

[1] 武部幹: “ディジタルフィルタの設計”, 東海大学出版会,(1986)

[2] M. Renfors,T. Saramäki: “A Class of Approximately Linear Phase Digital Filters Composed of Allpass Subfilters”,Proc. ISCAS, pp.678-681,(May 1986)

[3] 池原雅章, 田中宏幸, 黒田英夫: “全域通過回路を用いたIIRディジタルフィルタの設計– Remezアルゴリズムによる方法– ”, 電子情報通信学会論文誌,J75-A, 4,pp.710-717,(Apr. 1992)

[4] 張, 岩倉博: “全域通過回路によるコンプリメンタリ型IIRディジタルフィルタの設計– 最大固有値問題による設計法– ”, 電子情報通信学会論文誌,J75-A, 3,pp.491-499,(Mar. 1992)

[5] J-P.Thiran.: “Recursive Digital Filters with Maximally Flat Group Delay”, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18,6,pp.659-664,(Nov. 1985)

[6] P. Thajchayapong,P. Lomtong: “A Recursive Digital Filter with Maximally Flat Linear Phase at an Arbitrary Specified Frequency”, Proc. IEEE, 66,5,pp.594-596,(May 1978)

[7] P. Thajchayapong,P. Karnchanawadee,F. Cheevasuvit: “A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally Flat Magnitude and Group Delay at an Arbitrary Specified Frequency”, Proc. IEEE, 67,5,pp.871-873,(May 1979)

[8] P. Thajchayapong,F. Cheevasuvit: "A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Improved Passband Magnitude Response", Proc. IEEE, 67,12,pp.1663-1665,(Dec. 1979)

[9] M.Y.Makky,M.F.Fahmy: "Digital Bandpass Filters with Maximally Flat Amplitude and Delay Responses", IEEE Trans. Circuits & Sys., CAS-32,6,pp.598-600,(June 1985)

[10] Ansari R. and Liu B.: "A Class of Low-Noise Computationally Efficient Recursive Digital Filters with Applications to Sampling Rate Alterations", IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., ASSP-33,1,pp.90-97 ,(Feb. 1985)

[11] Andrew G. Deczky: "Equiripple and Minimax (Chebyshev) Approximations for Recursive Digital Filters", IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., ASSP-22,2, pp.98-111,(Apr. 1974)

# 付録 I　通過域・阻止域最大平坦型低域通過フィルタの設計データ

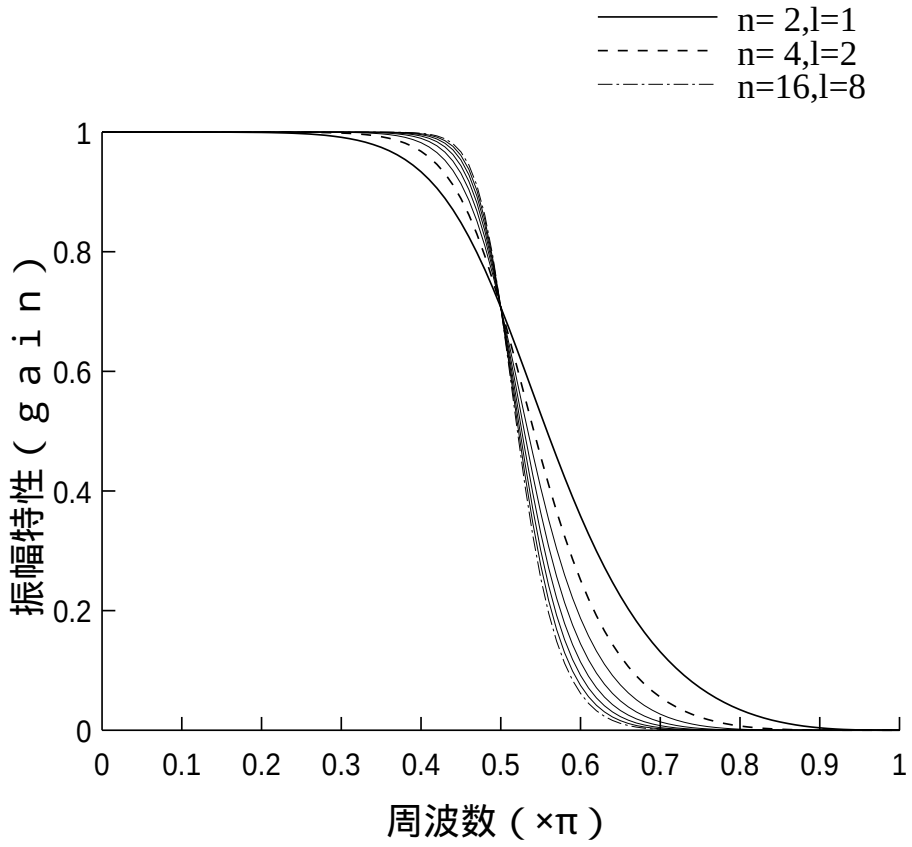
通過域・阻止域ともに最大平坦近似の低域通過フィルタの設計データを表 I.1および表 I.2に示す。

## I.1　$d = -1$ の場合

表 I.1　設計データ $d = -1$

| $n$ | $l$ | $\omega_p$ | $\omega_d$ | $n$ | $l$ | $\omega_p$ | $\omega_d$ | $n$ | $l$ | $\omega_p$ | $\omega_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1.20813 | 1.22724 | 7 | 1 | 0.54757 | 0.71120 | 9 | 3 | 1.04559 | 0.62742 |
| 3 | 1 | 0.90553 | 1.06169 | 7 | 2 | 0.91290 | 0.71184 | 9 | 4 | 1.28092 | 0.62178 |
| 3 | 2 | 1.64436 | 0.97396 | 7 | 3 | 1.22360 | 0.70365 | 9 | 5 | 1.51052 | 0.61428 |
| 4 | 1 | 0.75598 | 0.93240 | 7 | 4 | 1.52165 | 0.69070 | 9 | 6 | 1.74703 | 0.60346 |
| 4 | 2 | 1.30985 | 0.90772 | 7 | 5 | 1.83559 | 0.66855 | 9 | 7 | 2.00735 | 0.58482 |
| 4 | 3 | 1.87689 | 0.82962 | 7 | 6 | 2.21434 | 0.61343 | 9 | 8 | 2.33096 | 0.53743 |
| 5 | 1 | 0.66246 | 0.83836 | 8 | 1 | 0.50878 | 0.66576 | 10 | 1 | 0.45090 | 0.59592 |
| 5 | 2 | 1.12499 | 0.82976 | 8 | 2 | 0.84399 | 0.66800 | 10 | 2 | 0.74310 | 0.59963 |
| 5 | 3 | 1.54967 | 0.80249 | 8 | 3 | 1.12396 | 0.66264 | 10 | 3 | 0.98179 | 0.59696 |
| 5 | 4 | 2.02666 | 0.73447 | 8 | 4 | 1.38513 | 0.65452 | 10 | 4 | 1.19770 | 0.59279 |
| 6 | 1 | 0.59686 | 0.76719 | 8 | 5 | 1.64715 | 0.64271 | 10 | 5 | 1.40457 | 0.58751 |
| 6 | 2 | 1.00227 | 0.76484 | 8 | 6 | 1.93055 | 0.62252 | 10 | 6 | 1.61181 | 0.58060 |
| 6 | 3 | 1.35680 | 0.75110 | 8 | 7 | 2.27850 | 0.57168 | 10 | 7 | 1.82904 | 0.57060 |
| 6 | 4 | 1.71388 | 0.72651 | 9 | 1 | 0.47722 | 0.62797 | 10 | 8 | 2.07113 | 0.55322 |
| 6 | 5 | 2.13337 | 0.66587 | 9 | 2 | 0.78872 | 0.63113 | 10 | 9 | 2.37488 | 0.50867 |

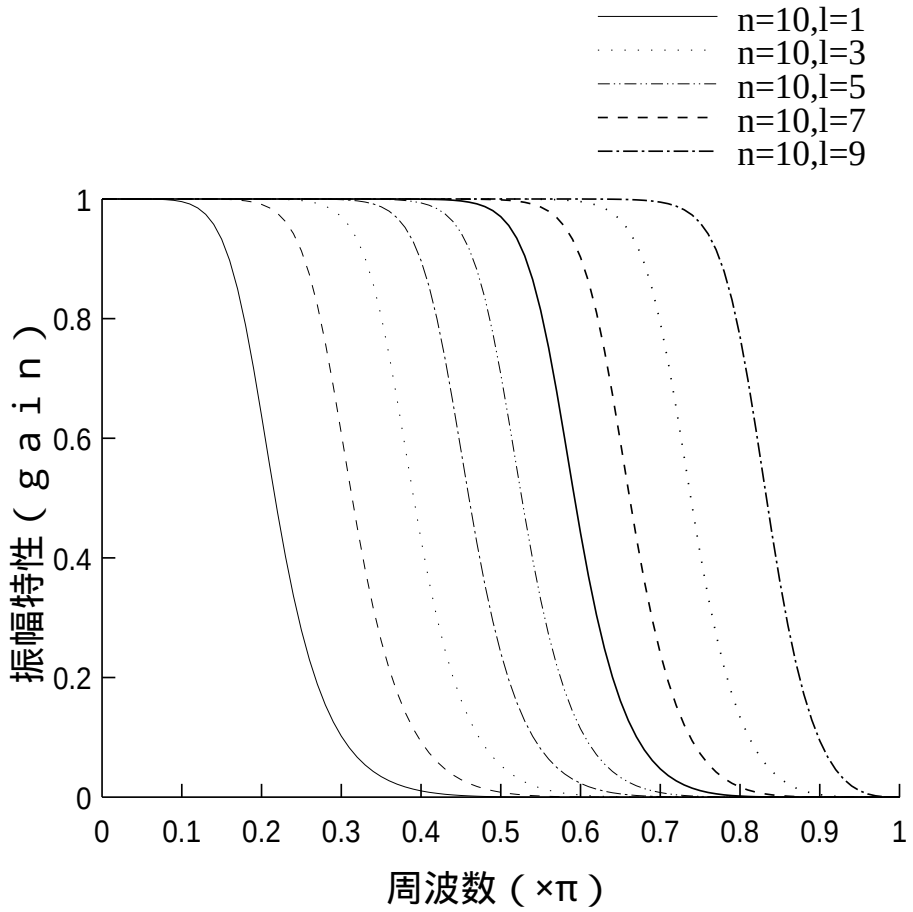
いくつかの場合の振幅特性をプロットすると図 I.1と図 I.2のようになる。




$n$、$l$ は通過域端周波数が小さいものから順に以下の通りである。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $n=2$ | $l=1$ | 5. | $n=10$ | $l=5$ |
| 2. | $n=4$ | $l=2$ | 6. | $n=12$ | $l=6$ |
| 3. | $n=6$ | $l=3$ | 7. | $n=14$ | $l=7$ |
| 4. | $n=8$ | $l=4$ | 8. | $n=16$ | $l=8$ |

**図 I.1** $n$ を変えた場合の振幅特性




$n$、$l$ は通過域端周波数が小さいものから順に以下の通りである。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $n=10$ | $l=1$ | 6. | $n=10$ | $l=6$ |
| 2. | $n=10$ | $l=2$ | 7. | $n=10$ | $l=7$ |
| 3. | $n=10$ | $l=3$ | 8. | $n=10$ | $l=8$ |
| 4. | $n=10$ | $l=4$ | 9. | $n=10$ | $l=9$ |
| 5. | $n=10$ | $l=5$ | | | |

図 **I.2** $l$ を変えた場合の振幅特性

# I.2 $d = 1$ の場合

表 I.2 設計データ $d = 1$

| $n$ | $l$ | $\omega_p$ | $\omega_d$ | $n$ | $l$ | $\omega_p$ | $\omega_d$ | $n$ | $l$ | $\omega_p$ | $\omega_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0.97694 | 1.70756 | 7 | 1 | 0.54790 | 1.16795 | 9 | 3 | 0.93857 | 1.02868 |
| 3 | 1 | 0.81455 | 1.55739 | 7 | 2 | 0.82513 | 1.14871 | 9 | 4 | 1.13831 | 1.01658 |
| 3 | 2 | 1.28898 | 1.47293 | 7 | 3 | 1.07601 | 1.13019 | 9 | 5 | 1.33441 | 1.00346 |
| 4 | 1 | 0.71351 | 1.42910 | 7 | 4 | 1.31986 | 1.10956 | 9 | 6 | 1.53459 | 0.98752 |
| 4 | 2 | 1.10312 | 1.38265 | 7 | 5 | 1.57177 | 1.08220 | 9 | 7 | 1.74826 | 0.96506 |
| 4 | 3 | 1.49556 | 1.31415 | 7 | 6 | 1.85242 | 1.03511 | 9 | 8 | 1.99193 | 0.92472 |
| 5 | 1 | 0.64278 | 1.32486 | 8 | 1 | 0.51392 | 1.10735 | 10 | 1 | 0.46147 | 1.00958 |
| 5 | 2 | 0.98122 | 1.29335 | 8 | 2 | 0.77083 | 1.09113 | 10 | 2 | 0.68832 | 0.99709 |
| 5 | 3 | 1.30350 | 1.25633 | 8 | 3 | 1.00014 | 1.07633 | 10 | 3 | 0.88725 | 0.98642 |
| 5 | 4 | 1.64536 | 1.19767 | 8 | 4 | 1.21867 | 1.06106 | 10 | 4 | 1.07235 | 0.97638 |
| 6 | 1 | 0.58968 | 1.23934 | 8 | 5 | 1.43750 | 1.04317 | 10 | 5 | 1.25159 | 0.96606 |
| 6 | 2 | 0.89297 | 1.21550 | 8 | 6 | 1.66795 | 1.01859 | 10 | 6 | 1.43098 | 0.95445 |
| 6 | 3 | 1.17292 | 1.19075 | 8 | 7 | 1.92815 | 0.97526 | 10 | 7 | 1.61658 | 0.93998 |
| 6 | 4 | 1.45365 | 1.15951 | 9 | 1 | 0.48558 | 1.05513 | 10 | 8 | 1.81666 | 0.91919 |
| 6 | 5 | 1.76042 | 1.10754 | 9 | 2 | 0.72606 | 1.04106 | 10 | 9 | 2.04659 | 0.88130 |

# 付録 II　所望の振幅特性が得られない例

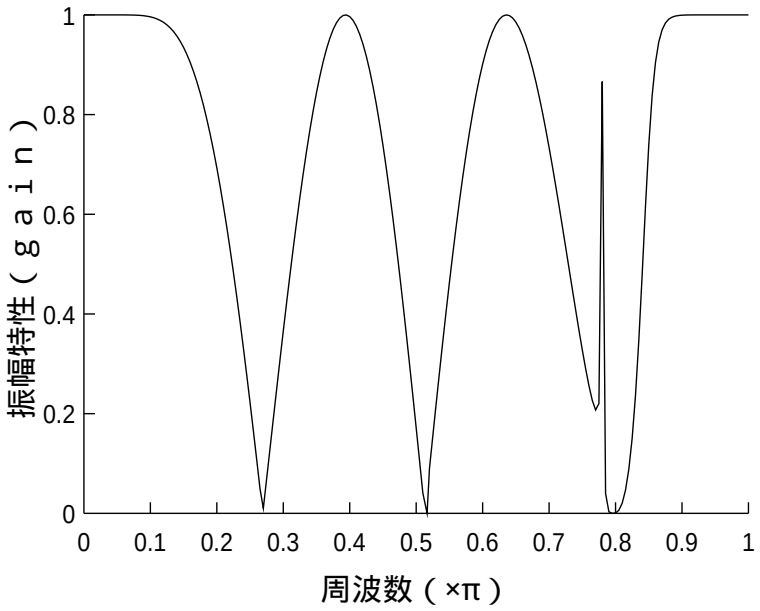
## II.1　通過域・阻止域最大平坦型帯域除去フィルタ

設計パラメータが以下のような帯域除去フィルタでは、振幅特性に余分なノッチが発生している。

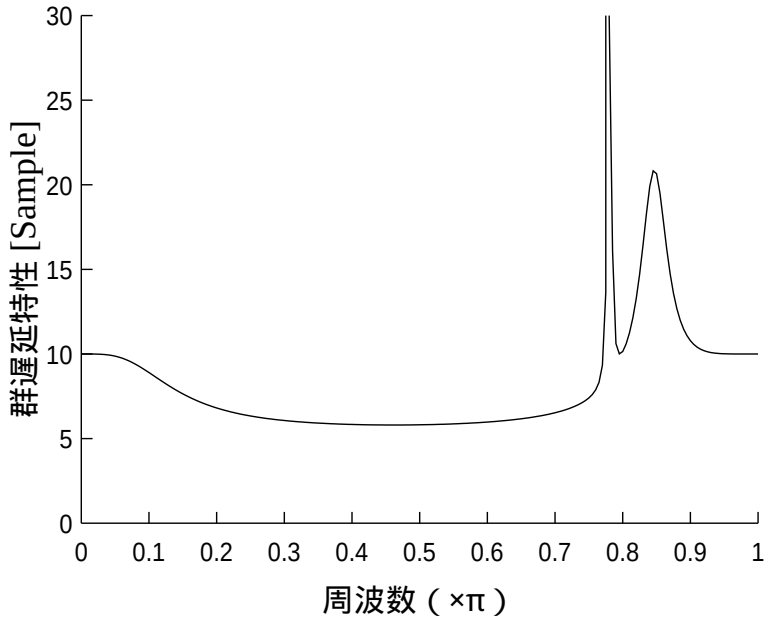
＜設計パラメータ＞

| | |
|---|---|
| $\omega = 0$ での平坦性のために割り当てる自由度 | $l = 2$ |
| $\omega = \omega_t$での平坦性のために割り当てる自由度 | $u = 2$ |
| $\omega = \pi$での平坦性のために割り当てる自由度 | $m = 3$ |
| フィルタ次数 | $n = 8$ |
| 除去したい周波数 | $\omega_t = 0.796\pi$ |
| 全域通過回路と遅延器との次数差 | $d = 2$ |

設計したフィルタの振幅特性と郡遅延特性を、それぞれ図 II.1(a) と図 II.1(b) に示す。図 II.1(b) の群遅延特性と式 (2.26) の安定条件から、このフィルターは安定である。




(a) 振幅特性




(b) 群遅延特性

図 **II.1**　最大平坦型帯域除去フィルタの設計例

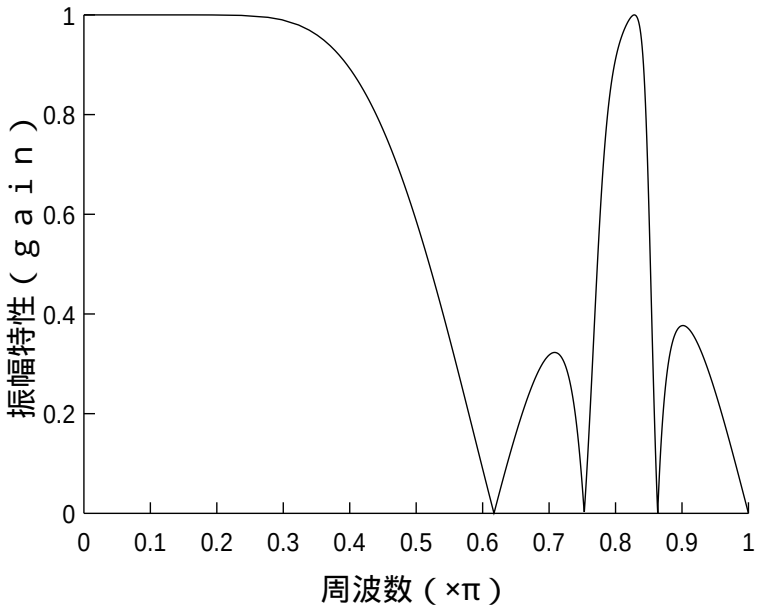
## II.2　阻止域等リプル近似型低域通過フィルタ

設計パラメータが以下のような阻止域等リプル近似型低域通過フィルタでは、全域通過回路と遅延器との位相差が $0$ になる周波数が出現し、阻止域で振幅が $1$ になってしまう周波数がある。

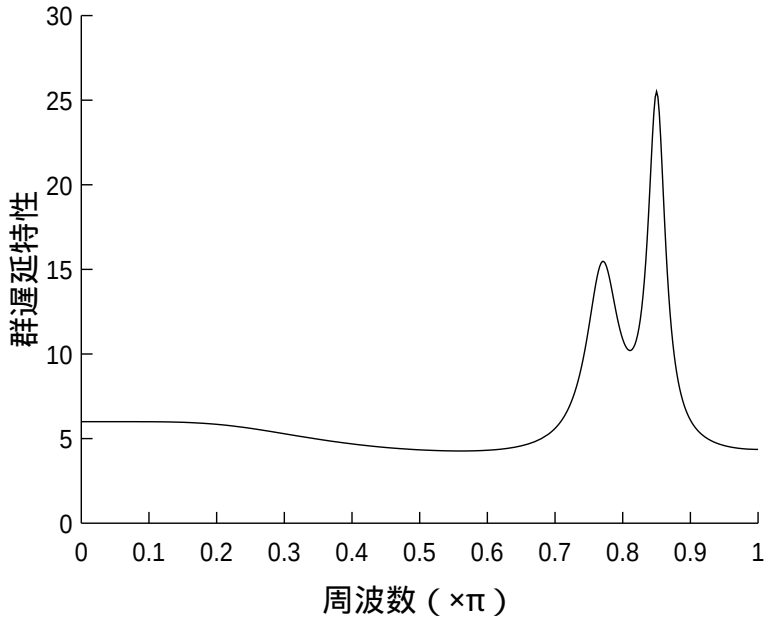
＜設計パラメータ＞

| | |
|---|---|
| $\omega = 0$ での平坦性のために割り当てる自由度 | $l = 3$ |
| $\omega = \pi$での平坦性のために割り当てる自由度 | $m = 3$ |
| フィルタ次数 | $n = 6$ |
| 阻止域端周波数 | $\omega_s = 0.573\pi$ |
| 全域通過回路と遅延器との次数差 | $d = -1$ |

設計した振幅特性と郡遅延特性は、それぞれ図 $\mathrm{II}.2(\mathrm{a})$ と図 $\mathrm{II}.2(\mathrm{b})$ である。図 $\mathrm{II}.2(\mathrm{b})$ の群遅延特性と式 $(2.26)$ の安定条件から、このフィルターは安定である。




(a) 振幅特性




(b) 群遅延特性

図 **II.2**　阻止域等リプル近似型低域通過フィルタの設計例